الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة تشرين
كلية العلوم

الميكانيك التحليلي

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_j$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

أ. د. حسن عبد الكريم سلمان
أستاذ في قسم الفيزياء

أ. د. أحمد شفيق بيشاني
أستاذ في قسم الفيزياء

د. محمد حسن فاهود
أستاذ مساعد في قسم الفيزياء

د. علي محمد محمود
أستاذ مساعد في قسم الفيزياء

1431 - 1430
2010 - 2009

الميكانيك التحليلي

الجمهورية العربية السورية

وزارة التعليم العالي

جامعة تشرين

كلية العلوم

الميكانيك التحليلي

أ. د. حسن عبد الكريم سلمان

أستاذ في قسم الفيزياء

أ.د. أحمد شفيق بيشاني

أستاذ في قسم الفيزياء

د. محمد حسن فاهود

أستاذ مساعد في قسم الفيزياء

د. علي محمود

مدرس في قسم الفيزياء

القسم: الفيزياء

السنة: الثانية

1429–1430 هـ

2008–2009 م

المحتوى

المقدمة

يعتبر الميكانيك التحليلي أحد فروع الميكانيك الأساسية يعتمد، بصورة عامة، على التحليل الرياضي في دراسة سائل الميكانيك حيث يتم حلها بطريقة تختلف عن الميكانيك النيوتني الذي يرتكز على المبادىء الثلاثة المعروفة.

بدأت تظهر المبادىء العامة للميكانيك التحليلي في القرن الثامن عشر بفضل علماء كبار مثل لاغرانج وهاملتون وبواصون وآخرون الذين وضعوا الأسس العامة واستنتجوا معادلات حركة أسهل وأسلس من معادلات نيوتن.

لقد حاولنا في الفصل الأول من هذا الكتاب شرح المبادىء والتعاريف الأساسية للميكانيك التحليلي وصولاً إلى الشروط العامة لتوازن الجمل المادية تحليلياً، وضمن الفصل تمارين محلولة وغير محلولة.

في الفصل الثاني استنتجنا المعادلات العامة للحركة بطريقة لاغرانج وقد تضمن هذا الفصل كثيراً من التطبيقات لما لها من أهمية في فهم الموضوع وتمكين الطالب من التعامل بنفسه مع مسائل الميكانيك، أما في الفصل الثالث فقد شرحنا طرقاً أخرى للوصول إلى معادلات الحركة، منسوبة إلى كل من هاملتون وراوث وجاكوبي وقد تضمن الفصل أيضاً عرضاً لأقواس بواصون وبيان أهميتها في إيجاد تكاملات الحركة ثم أوردنا تعميماً لهذه الأقواس في ميكانيك الكم وختمنا الفصل بدراسة معادلة هاملتون-جاكوبي في الميكانيك الموجي والعلاقة بين الميكانيك التقليدي، الذي يتعامل مع الأجسام الماكروسكوبية (الجهرية) والميكانيك الموجي، الذي يتعامل مع الأجسام الميكروسكوبية (المجهرية) وبينا أنه يمكن اعتبار الأول كحالة خاصة من الثاني.

وفي الفصل الرابع شرحنا مبادىء التغيرات (المتغايرات) التي يمكن أن نستنتج معادلات الحركة من كل منها، كمبدأ الفعل الأصغر والقسر الأصغر وغيرها...

وقد كان من الضروري، في الفصل الخامس، أن نستفيد من الميكانيك التحليلي لدراسة حركة جسيم مشحون في حقل كهرطيسي في إطار النظرية النسبية الخاصة، لما لهذه الحركة من أهمية في نظرية المسرعات الخطية والدائرية. وقد كان من المفيد في نهاية الفصل، أن نتطرق لنظرية هامة تطبق في الكثير من فروع الفيزياء التقليدية والكوانتية؛ فأعطينا لمحة سريعة ومبسطة عن نظرية الاضطراب من وجهة نظر كلاسيكية تاركين القسم الكوانتي لميكانيك الكم الذي سيدرسه الطالب في السنوات التالية.

تضمن الفصل السادس موضوعات تتعلق بتحريك الجسم الصلب وبعض تطبيقاته الجيروسكوبية.

تضمن الفصل السابع المبادىء العامة لنظرية المرونة وبعض تطبيقاتها.

وأخيراً، تضمن الفصل الثامن والتاسع موضوعات تتعلق بالمبادىء الأساسية للنظرية النسبية الخاصة وميكانيك النظرية النسبية على التوالي.

نأمل أن يستفيد طلابنا الأعزاء من هذا الكتاب ويحقق أماني الطليعة منهم في الحصول على معلومات جديدة يبحثون عنها ويخلق عندهم ملكة حل مسائل الميكانيك والتعامل معها بيسر وبسهولة.

أخيراً، نتوجه إلى زملائنا أعضاء الهيئة التدريسية وخاصةً أولئك الذي يتعاملون مع مواضيع الميكانيك أن لايبخلوا علنيا بملاحظاتهم حول الكتاب ولهم جزيل الشكر والامتنان.

المؤلفون

الفصل الأول

أسس الميكانيك التحليلي

من المعلوم أن مايسمى في الرياضيات بالهندسة التحليلية يستخدم التحليل الرياضي في دراسة الهندسة المستوية والفراغية فهو لايتعامل مع المستقيم والدائرة أو الكرة أو مجسم القطع الناقص وغيرها كأشكال هندسية فقط وإنما يدرسها باعتبارها تحقق معادلات رياضية ويستنتج كل خواصها اعتماداً على ذلك. ألا يمكن تعميم هذه الطريقة على الميكانيك؟.

بدأ علما الرياضيات والميكانيك اعتباراً من القرن الثامن عشر بالعمل على حل مشاكل الميكانيك اعتماداً على التحليل الرياضي مما ساهم في نشوء مايسمى بالميكانيك التحليلي. ومع ذلك لم يفقد ميكانيك نيوتن الذي تعرفنا عليه في السنوات السابقة والذي يرتكز على المبادىء الثلاثة المعروفة، أهميته ولانستطيع التقليل من منجزاته فقد ساهم في فهم كثير من الظواهر الميكانيكية وحل المشكلات الهندسية المرتبطة بعلم الميكانيك كبناء الجسور وتشييد المباني ودراسة حركة القذائف والكواكب السيارة وغيرها ولايزال حتى وقتنا هذا مرجعاً أساسياً في حل المشكلات المرتبطة بالصواريخ البالستية والأقمار الصناعية وسفن الفضاء وغيرها.

سندرس في هذا الفصل الأسس العامة للميكانيك التحليلي فنذكر أولاً بعض التعاريف الأساسية التي لابد منها كي نستطيع فهم واستخدام الميكانيك التحليلي في حل مسائل الميكانيك وسنرى أنه يقدم لنا طريقة سهلة وسلسة ومفيدة في هذا المجال.

1- الارتباطات (القيود Constraints):

تقسم الجمل المادية بالنسبة لتأثير القوى فيها إلى ثلاثة أقسام:

أ- **حرة:** لاتؤثر عليها أي قوى مطلقاً. مثال ذلك سفينة فضائية بعيدة عن أي مجال جاذب، مجموعة جسيمات خارج أي مجال قوى.

ب- **طليقة:** تتحرك تحت تأثير قوى فعالة فقط.

ج- **مقيدة:** تؤثر عليها بالإضافة إلى القوى الفعالة قوى، ناتجة عن ملامستها أجسام مجاورة، تسمى قوى الربط مثل قوى توتر خيط أو رد فعل سطح أو سلك وتنعدم هذه القوى عندما تتحرر الجملة من القيد فتصبح طليقة.

يهتم الميكانيك التحليلي بصورة رئيسية بدراسة الجمل المقيدة وسنرى فيما بعد أن عدد المعادلات اللازمة لوصف الجملة يقل وبالتالي تصبح دراستنا أسهل.

كيف نعبر عن القيد (الارتباط) الذي تتأثر فيه الجملة؟ من الواضح أنه لابد من تحويله إلى معادلة رياضية.

عندما تتحرك النقطة على سطح فلابد أن تحقق معادلة السطح وكذلك عندما تتحرك على منحني ويمكن تعميم ذلك على أي جملة مادية.

وقد يتعلق الارتباط بالسرعة والزمن. وهكذا نكتب معادلة الارتباط بصورة عامة لجملة مادية مؤلفة من N نقطة بالعلاقة:

$$f(x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1 \dots x_N, y_N, z_N, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N, t) = 0 \quad \textbf{(1.1)}$$

ولنأخذ بعض الأمثلة:

عندما تتألف الجملة من جسيم واحد $M(x, y, z)$ يتحرك على سطح كرة نصف قطرها a فإن معادلة الارتباط هي:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \qquad \textbf{(1.2a)}$$

وقد تكتب المعادلة السابقة بأي إحداثيات أخرى. في الإحداثيات الكروية مثلاً، نعبر عن الإحداثيات بالوسطاء (r, θ, φ) وتوضع كما يلي:

$$r - a = 0 \qquad (1.2b)$$

وعندما تتألف الجملة من N جسيم يتحرك كل منها على سطح الكرة السابقة فيمكن أن نكتب معادلات الارتباط كما يلي:

$$x_i^2 + y_i^2 + x_i^2 - a^2 = 0 \;,\; r_i - a = 0 \qquad \textbf{(1.3)}$$

حيث $(i=1,2,\dots,N)$ عدد نقط الجملة.

قد تخضع الجملة في حركتها لعدة ارتباطات. في المثال السابق يمكن أن نجبر الجسيم على الحركة على دائرة أفقية على سطح الكرة وعندئذٍ تحقق إحداثياته المعادلة التالية:

$$\theta = C_1 \qquad \textbf{(1.4)}$$

ويقال في هذه الحالة أن للجسيم درجة حرية واحدة. وهكذا نعرف عدد درجات الحرية بصورة عامة، وهو عدد الوسطاء المستقلة اللازمة لدراسة الجملة، بأنه عدد الإحداثيات اللازمة لوصف الجملة فيما لو كانت طليقة مطروحاً منه عدد معادلات الارتباط. فإذا تأثر الجسيم المذكور سابقاً بالارتباط المعبر عنه بالمعادلة (1.2a) فإن عدد درجات الحرية هو 3-1=2. أما إذا تأثر بالارتباطين الممثلين بالمعادلتين (1.2a) و (1.4) فيصبح هذا العدد 3-2=1 أما إذا تأثر الجسيم المذكور بثلاثة ارتباطات لاتتعلق بالزمن فلايوجد معنى للمسألة لأن الجسيم سيكون ثابتاً في هذه الحالة ولايتحرك. مثال ذلك أن نضع قيداً آخر يتمثل بإجبار الجسيم على الحركة على دائرة شاقولية مرسومة على سطح الكرة معادلتها $\varphi = C_2$ وعندئذٍ سيكون هذا الجسيم ساكناً حتماً في النقطة $M(a, C_1, C_2)$ ولايكون له أي درجة حرية.

ولزيادة الإيضاح نورد بعض الأمثلة لحساب عدد درجات الحرية لجملة مادية:

أ- إن عدد درجات الحرية لجملة مادية مؤلفة من N جسيم طليق، معينة بـــ 3N احداثي ولاتخضع لأي ارتباط هو 3N، أما إذا تأثرت الجملة بـــ k ارتباط فيصبح العدد 3N-k=s.

ب- يمكن البرهان أن الجسم الصلب الطليق يتعين في الفضاء بمعرفة إحداثيات ثلاثة نقط منه $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ، $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ، $M_3(x_3, y_3, z_3)$ (وسطاء غير مستقلة) وهي ترتبط فيما بينها بثلاث علاقات تعبر عن البعد الثابت بين كل نقطتين من الجسم الصلب وبالتالي ينخفض عدد الوسطاء

المستقلة اللازمة لدراسته إلى ست فقط تؤخذ كما يلي: $[x(c), y(c), z(c)]$ إحداثيات مركز كتلته c و (θ, Ψ, φ) زوايا أولر.

وللتأكد من ذلك نقول أن أي نقطة أخرى M_i من هذا الجسم إحداثياتها (x_i, y_i, z_i) سيكون بعدها عن كل من النقط الثلاث المذكورة ثابتاً وهذا يعطي بالضبط ثلاث معادلات لحساب (x_i, y_i, z_i) وبالتالي يكون عدد درجات الحرية لهذا الجسم الصلب الطليق هو ست فقط.

ج- ينخفض عدد درجات الحرية إلى ثلاث في المثال السابق إذا ثبتت نقطة من الجسم الصلب. يعبر عن هذه الدرجات الثلاثة بصورة عامة، بزوايا أولر.

د- للحركة المستوية لجسم صلب ثلاث درجات حرية هي مركز كتلته $x(C), y(C)$ وزاوية الدوران φ حول مركز الكتلة.

هـ- يوجد درجة حرية واحدة لجسم صلب يدور حول محور ثابت هي زاوية الدوران φ.

نعرف أخيراً الارتباط التحليلي ونقول إنه الارتباط الذي لايتعلق بقانون الحركة، ولايكون الارتباط تحليلياً خلافاً لذلك، فمثلاً لايكون ارتباط جسم معلق بنابض تحليلياً لأن هذا الارتباط يحدد مقدماً قانون الحركة الجيبي للجسم، أما الجسم الموجود على سطح فيمكن أن يتحرك بأية حركة تبعاً للقوى المؤثرة عليه.

2- أنواع الارتباطات:

يمكن التمييز بين عدة أنواع من الارتباطات نوجزها فيمايلي:

أ- يقسم الارتباط من ناحية وجود التفاضل إلى قسمين:

- ارتباط هندسي: لايحوي أي تفاضلات.
- ارتباط تفاضلي: وهو الارتباط الذي تحوي معادلته اشتقاقات وبالتالي فهو يضع قيوداً على السرعة.

وهكذا تكون الارتباطات المعبر عنها بالعلاقات (1.2)،(1.2a)،(1.4) هندسية. أما إذا فرضنا أن جسيماً يتحرك في الفضاء وهو يخضع لمعادلة الارتباط:

$$\dot{x}^2 - \dot{y}^2 - a^2 = 0 \qquad \textbf{(1.5a)}$$

أو ارتباط معادلته:

$$\dot{\rho} = \text{Const.} \qquad \textbf{(1.5b)}$$

فيتم اعتبار الارتباطين السابقين حركيين.

ب- يقسم الارتباط بالنسبة لوجود الزمن فيه إلى قسمين:

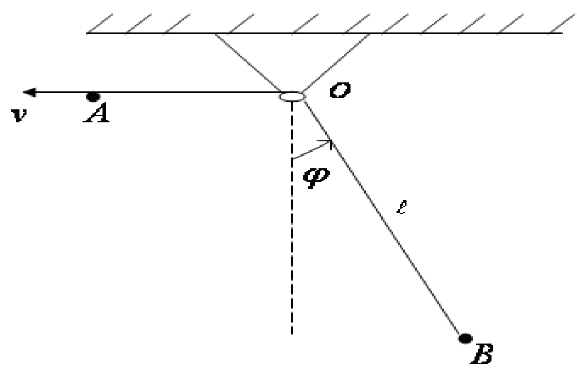
- ارتباط مستقر (ثابت): لايحوي الزمن بشكل صريح.
- ارتباط متحول (غير مستقر): يحوي الزمن بشكل صريح.

هذا مع العلم أن كل الارتباطات لابد أن تحوي الزمن من خلال الاحداثيات وخلاف ذلك يكون المتحرك ساكناً. ولكن قد يظهر بشكل صريح أو يكون تابعاً ضمنياً للزمن. وهكذا تكون كل الارتباطات (1.2) و (1.4) مستقرة.

أما إذا فرضنا نواساً بسيطاً شكل (1.1) يمر خيط تعليقه على بكرة ويسحب الخيط بسرعة منتظمة (v) فإن معادلة ارتباطه هي:

$$\ell = \ell_0 - vt \qquad \textbf{(1.6)}$$

حيث ℓ_0 طول الخيط الكلي، هو ارتباط متحول ويمكن أن يقال الشيء نفسه عن الثقل المعلق بطرف حبل رافعة تنقله من مكان إلى آخر.



الشكل (1.1)

ج- يقسم الارتباط بالنسبة لإمكانية تحرره من القيد إلى قسمين:

- ارتباط محرر (أحادي الجانب): يمكن للمتحرك أن يتحرر من القيد.

مثلاً جسيم يتحرك على سطح فهو مرتبط بالسطح ويحقق معادلته طالما بقي متحركاً عليه ولكن عندما يتحرر من السطح يصبح طليقاً ولايخضع لأي ارتباط.

- ارتباط مقيد (ثنائي الجانب): لايمكن للمتحرك أن يتحرر من القيد مثال ذلك حلقة معدنية تتحرك على سلك معقوف مع طرفيه بحيث لايستطيع مغادرته.

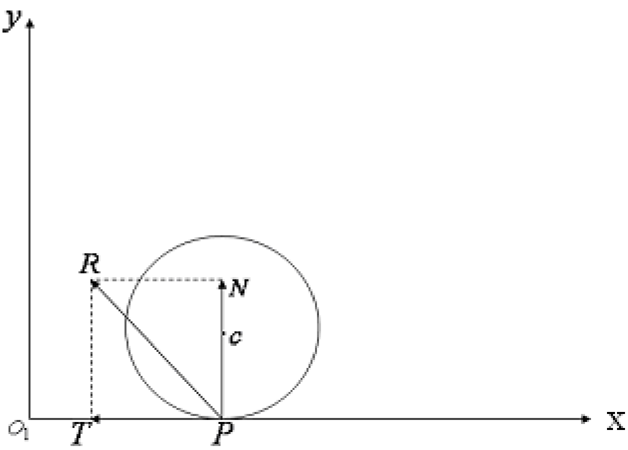
د- أخيراً يقسم الارتباط التفاضلي إلى قسمين:

- هولونومي(Holonomic): وهو ارتباط تفاضلي يمكن استكماله وبالتالي يؤول إلى ارتباط هندسي، فالارتباط المعبر عنه بالمعادلة (1.5b) يمكن استكماله وبالتالي فهو هولونومي.

- لاهولونومي(Nonholonomic): وهو ارتباط تفاضلي لايمكن استكماله وبالتالي لايؤول إلى ارتباط هندسي ولابد من التعامل معه على هذا الأساس، مثال ذلك الارتباط (1.5a).

لنأخذ مثالاً آخر على الارتباط الهولونومي فنفرض دولاباً يتدحرج على طريق أفقية بحيث يبقى ملازماً للطريق (ارتباط ثنائي الجانب) شكل (1.2).

يتعين مركز الدولاب بالاحداثيين y(c) و x(c).



الشكل (1.2)

من الواضح أنه يمكن كتابة معادلة ارتباط الدولاب بالطريق كمايلي:

$$y^{\bullet}(c) = 0 \qquad \textbf{(1.7a)}$$

وهو ارتباط تفاضلي يمكن استكماله ليصبح:

$$y(c) = Const. \qquad \textbf{(1.7b)}$$

وبالتالي يؤول إلى ارتباط هندسي.

المعادلتان (1.7a,b) متكافئتان ويمكن أن نأخذ أياً منهما.

من المفيد في نهاية هذه الفقرة أن نذكر نوعاً آخر من الارتباط يعبر عنه بمتراجحة فإذا فرضنا مجموعة جسيمات تتحرك على السطح الخارجي لكرة نصف قطرها (a) فيمكن كتابة معادلات ارتباطها:

$$r_i \geq a \qquad \textbf{(1.8a)}$$

أما إذا تحركت الجسيمات على السطح الداخلي للكرة ممكن أن نضع معادلات الارتباط:

$$r_i \leq a \qquad \textbf{(1.8b)}$$

حيث $(i = 1,2,...,N)$ عدد الجسيمات على الكرة.

3- الانتقال الافتراضي:

نكمل في هذه الفقرة والتي تليها شرح التعاريف والمفاهيم الضرورية لدراسة توازن الجمل المادية اعتماداً على الميكانيك التحليلي فنعرف أولاً الانتقال الافتراضي ونقول أنه انتقال نرمز له $\delta\vec{r}$ (تمييزاً عن الانتقال الحقيقي $d\vec{r}$) يحدث بثبات الزمن.

لنبحث عن العلاقة التي يحققها هذا الانتقال فنفرض جسيماً يتحرك على سطح معادلته (معادلة الارتباط):

$$f(x, y, z, t) = C \qquad \textbf{(1.9)}$$

ولنفرض انتقالاً افتراضياً اختيارياً $\delta\vec{r}$ مركباته $(\delta x, \delta y, \delta z)$ يحدث في اللحظة t بحيث يبقى الجسيم خاضعاً للارتباط (1.9) وبالتالي تتحقق العلاقة:

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = C \qquad \textbf{(1.10a)}$$

وبالنشر نجد:

$$f(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\partial y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=C \qquad \textbf{(1.10b)}$$

ومنه:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=\nabla f.d\vec{r}=0 \qquad \textbf{(1.11a)}$$

أي أن $\vec{\delta r}$ يتعامد مع الناظم على السطح الذي معادلته (1.9).

أما عندما يكون الارتباط محرراً حيث يمكن للجسيم أن ينفك عن السطح ولاتتحقق العلاقة (1.11a) ويساوي عندئذٍ الطرف الثاني من (1.10b) $C+\delta C$ وبالتالي نجد عوضاً عن (1.11a) العلاقة التالية:

$$\nabla f.\delta\vec{r}=\delta C \qquad \textbf{(1.11b)}$$

أما العلاقة التي يحققها الانتقال الحقيقي $d\vec{r}$ الذي يحدث بفعل القوة $\vec{F}$ المؤثرة على الجسيم، فتختلف عما سبق. ومن السهل أن ننشر (1.10a) بفرض أن الانتقال $d\vec{r}$ وليس $\vec{\delta r}$. فنجد أخيراً.

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0 \qquad \textbf{(1.12a)}$$

أو:

$$\nabla.d\vec{r}+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0 \qquad \textbf{(1.12b)}$$

وهي تختلف عن (1.11a) ولكن يمكن أن تتطابق العلاقتان عندما لاتحوي معادلة الارتباط (1.9) الزمن بشكل صريح وبالتالي يمكن أن نجد انتقالاً افتراضياً $\vec{\delta r}$ ينطبق على انتقال حقيقي $d\vec{r}$.

نعمم العلاقات السابقة فنفرض جملة مادية مؤلفة من N جسيم احداثيات كل منها (x_i,y_i,z_i) $(i=1,\dots,N)$ تتأثر بـــ k ارتباط هولونومي ثنائي الجانب يعبر عنها بالمعادلات:

$$f_\alpha=(\dots x_i,y_i,z_i,\dots,t)=C_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\dots,k) \qquad \textbf{(1.13)}$$

ولنعط للجسيم $M_i(x_i,y_i,z_i)$ انتقالاً افتراضياً $\vec{\delta r_i}$ فنجد:

$$f_\alpha(...x_i+\delta x_i, y_i+\delta y_i, z_i+\delta z_i, ..., t)=0 \qquad \textbf{(1.14)}$$

وبالنشر والاختصار نجد:

$$\sum_{i=0}^{N} \nabla_i f_\alpha . \delta \vec{r_i} = 0 \qquad \textbf{(1.15)}$$

وهي عبارة عن k علاقة تحققها الانتقالات الافتراضية للجسيمات. أما الانتقالات الحقيقية فتحقق العلاقات:

$$\sum_{i=1}^{N} \nabla_i . f_\alpha . d\vec{r_1} + \frac{\partial f\alpha}{\partial t} dt = 0 \qquad \textbf{(1.16)}$$

أما عندما يكون الارتباط محرراً فيجب أن نضيف إلى طرفي العلاقتين (1.15) و (1.16) δC_α و dC_α من الجهة اليمنى، على الترتيب.

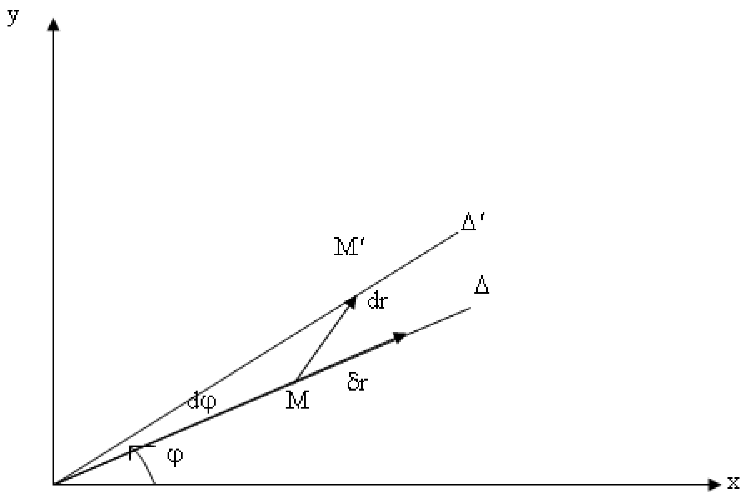
من المفيد، قبل ختام هذه الفقرة، أن نذكر طريقة حساب الانتقال الافتراضي التي نحتاجها في حل المسائل، فنقول أنه يحسب كالتفاضل الحقيقي تماماً ولكن بوضع δ بدلاً من d والانتباه إلى أنه يحدث بثبات الزمن فإذا كان لدينا التابع:

$$z = f(x, y, t) \qquad \textbf{(1.17)}$$

فإن:

$$\delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\delta f}{\partial y}\delta y \qquad \textbf{(1.18)}$$

ولتوضيح مفهوم الانتقال الافتراضي والانتقال الحقيقي نورد المثال التالي:
تتحرك نقطة مادية (حلقة) على محور Δ يدور بسرعة زاوية ثابتة ً حول المحور الشاقولي الثابت oz المتعامد مع مستوي الشكل (1.3). اكتب معادلات الارتباط وعين كل من الانتقالين الافتراضي والحقيقي.



الشكل (1.3)

الحل:

نحدد موضع الحلقة M في الفضاء بالاحداثيات الاسطوانية $M(\rho,\varphi,z)$.

يجب أن تعبر معادلة الارتباط الأولى عن أن الحلقة تبقى في المستوي xoy وبالتالي يكون:

$$z = 0$$

أما المعادلة الثانية فيجب أن تؤكد أن M تبقى على المحور Δ فهي تحقق معادلته أي:

$$\varphi - \omega t = 0$$

وأما الانتقال الافتراضي $\delta\vec{r}$ فمركباته $\delta\rho, \rho\delta\varphi, \delta z$ وهي كما يلي:

$$\rho\delta\varphi = 0 , \delta z = 0 , \delta\rho \neq 0$$

ولكن الانتقال الحقيقي $d\vec{r}$ سيختلف عن الافتراضي، لأن معادلة الارتباط الثابتة تتبع الزمن بشكل صريح، وهو:

$$\rho d\varphi = \rho\omega dt \neq 0 \;\; , \;\; dz = 0 , d\rho \neq 0$$

وبالتالي يكون له مركبتان الأولى على $\vec{e}_\rho$ (متجه الواحدة المقابل لتزايد ρ) وهي $d\rho$ والثانية على $\vec{e}_\varphi$ (متجة الواحدة المقابل لتزايد δ) وهي $\rho d\varphi$.

وهكذا يمكن رسم كل من $\vec{\delta r}$ و $\vec{dr}$ (متجه الواحدة المقابل لتزايد φ) على

الشكل (1.3) وهنا يكون عدد درجات الحرية 3-2=1 ويكفي حساب $\rho(t)$ لمعرفة قانون الحركة.

4- العمل الافتراضي – الارتباط المثالي:

نعرف العمل الافتراضي العنصري، كما عرفنا العمل الحقيقي للقوة $\vec{F}$ المؤثرة في جسيم $M(x,y,z)$ ، بالعلاقة:

$$\delta A = \vec{F}.\delta\vec{r} = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z \qquad \textbf{(1.19)}$$

وهي تتطابق مع عبارة العمل العنصري الحقيقي بعد تبديل $d\vec{r}$ بـــ $\delta\vec{r}$. وعلى ضوء ذلك نستطيع أن نكتب العمل الافتراضي العنصري للقوة $\vec{F}$ المؤثرة في الحلقة M في المثال السابق:

$$\delta A(\vec{F}) = F_\rho.\delta\rho \qquad \textbf{(1.20)}$$

أما العمل العنصري الحقيقي فهو:

$$dA(\vec{F}) = \vec{F}.d\vec{r} = F_\rho d\rho + F_\varphi \rho d\varphi = F_\rho d\rho + F_\varphi \rho\omega dt \qquad \textbf{(1.21)}$$

أما العمل العنصري الافتراضي لرد الفعل فهو:

$$\delta A(\vec{R}) = \vec{R}.\delta\vec{r} \qquad \textbf{(1.22)}$$

نعرف أخيراً <u>الارتباط المثالي</u> فنقول إنه الارتباط الذي يكون فيه العمل الافتراضي العنصري لرد الفعل يساوي الصفر.

أمثلة:

أ- إذا لازمت نقطة مادية سطحاً صقيلاً يكون رد الفعل ناظمي دوماً على السطح أما الانتقال الافتراضي فقد رأينا أنه متعامد مع التدرج أي متعامد مع الناظم وبالتالي ينعدم المقدار $\vec{R}.\delta\vec{r}$ وهكذا يكون الارتباط مثالياً في هذه الحالة. أما إذا لم يكن السطح صقيلاً فلابد من وجود مركبة مماسية لرد الفعل لاينعدم عملها الافتراضي وبالتالي لايمثل ارتباط النقطة (الجسيم) بالسطح الخشن ارتباطاً مثالياً.

ونلاحظ أن العمل الحقيقي هنا يساوي الصفر أيضاً عندما يكون السطح صقيلاً ولكنه لايساوي الصفر عندما يكون الارتباط متحولاً والمثال التالي يوضح ذلك.

ب- يتحرك مستوي صقيل باتجاه المحور oz الشاقولي بسرعة ثابتة u بينما يتحرك على المستوي جسيم. أوجد العمل الافتراضي والحقيقي لرد الفعل.

إن معادلة الارتباط هي:

$$z = ut \Rightarrow z - ut = 0$$

$$\delta z = 0 \, , \, dz = u.dt \neq 0$$

وبما أن رد الفعل يتجه باتجاه oz يكون العمل الافتراضي العنصري:

$$\delta A = \vec{R}.\vec{\delta r} = R\delta z = 0$$

أما العمل الحقيقي العنصري لرد الفعل:

$$dA = \vec{R}.\vec{dr} = R.dz = Rudt \neq 0 \qquad \textbf{(1.23)}$$

ج- هل يعتبر الارتباط الدولاب (على الشكل 1.2) بالطريق مثالياً؟

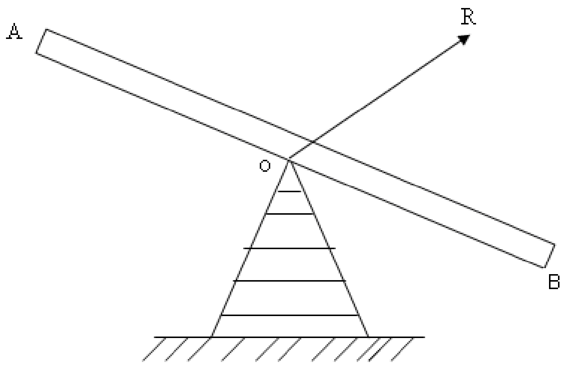
يوجد رد فعل في النقطة p حيث يلامس الدولاب الطريق وهو مؤلف من مركبتين ناظمية N ومماسية T (قوة الاحتكاك) تؤمن تدحرج الدولاب (راجع الشكل 1.2).

أما معادلة الارتباط فهي $y(c) = a$ حيث a هي نصف قطر الدولاب أماعمل رد الفعل فهو:

$$\delta A = \vec{R}.\vec{\delta r} = T\delta P_T + N\delta P_N \qquad \textbf{(1.24)}$$

وطالما أن الدولاب يبقى ملازماً للطريق فإن $\delta P_N = 0$. وكذلك $\delta P_T = 0$ لأن النقطة P هي المركز الآني للدوران وبالتالي تنعدم سرعتها. وهكذا يكون العمل الافتراضي لرد الفعل معدوماً والارتباط مثالياً. والجدير بالذكر أن هذا الارتباط لن يكون مثالياً إذا حدث انزلاق مع التدحرج لأن النقطة P تكتسب سرعة أفقية أثناء التزحلق وبالتالي $\delta P_T \neq 0$.

د- عارضة ترتكز من منتصفها على نقطة ثابتة. هل الارتباط مثالي؟ شكل (1.4).



الشكل (1.4)

وبما أن $\delta r_o = 0$ لأن o تبقى ثابتة فرضاً وبالتالي يكون الارتباط مثالياً.

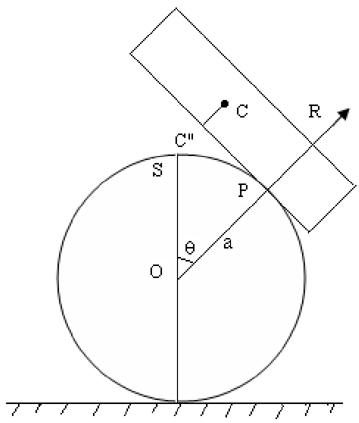
هـ- تتدحرج عارضة دون انزلاق على سطح كرة ثابتة شكل (1.5).

- هل الارتباط مثالي؟
- ماهو عدد الوسطاء المستقلة (عدد درجات الحرية)؟

من الواضح أن سرعة النقطة P، حيث يؤثر رد الفعل، تساوي الصفر لأن التدحرج يتم دون انزلاق وبالتالي يكون العمل العنصري لرد الفعل:

$$\delta A = \vec{R}.\delta\vec{P} = 0 \qquad \textbf{(1.26)}$$

فالارتباط مثالي.



الشكل (1.5)

لقد رأينا أن للجسم الصلب الذي يتحرك حركة مستوية ثلاث درجات حرية في الحالة العامة. أثنتان لمركز كتلته $x(C), y(C)$ وثالثة θ لدورانه. وفي حالتنا هذه يمكن معرفة دوران العارضة بواسطة الزاوية θ بين المحور الشاقولي ونصف القطر المتعامد مع مستوي العارضة المار من مركز كتلتها.

أما إحداثيات مركز كتلتها فيتعين بالزاوية نفسها θ ولبرهان ذلك نلاحظ أن:

$$\vec{OC} = \vec{OP} + \vec{PC'} + \vec{C'C} \qquad \textbf{(1.27a)}$$

فإذا فرضنا أنه في بداية الحركة انطباق C' على ذروة الكرة فإن $PC' = a\theta$ حيث a نصف قطر الكرة، وفرضنا أيضاً أن سماكة العارضة $2h$ فيمكن أن نجد بإسقاط $(1.27a)$ على المحورين ox , oy الموضحين على الشكل (1.5) مايلي:

$$\left.\begin{aligned} x(C) &= a\sin\theta - a\theta\cos\theta + h\sin\theta \\ y(C) &= a\cos\theta + a\theta\sin\theta + h\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1.27b)}$$

وبالتالي يكون للمسألة درجة حرية واحدة هو θ (وسيط واحد مستقل).

5- المبدأ التوازني للانتقالات الافتراضية:

يمكننا الآن على ضوء الفقرات الأربع السابقة، دراسة توازن الجمل المادية اعتماداً على الميكانيك التحليلي، لهذا نبرهن أولاً النظرية الأساسية التالية:

– الشرط اللازم والكافي لتوازن جملة مادية خاضعة لارتباطات مثالية ثنائية الجانب ومستقرة هو أن يكون مجموع الأعمال الافتراضية الجزئية للقوى الفعالة يساوي الصفر وبالتالي تتحقق العلاقة:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} . \delta \vec{r_i} = 0 \qquad \textbf{(1.28)}$$

البرهان:

أ- لزوم الشرط:

نفرض أن الجملة متوازنة وبالتالي يجب البرهان أن $\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} . \vec{\delta r_i} = 0$.

إن توازن الجملة ككل يعني أن كل نقطة M_i من نقطها تتأثر بقوتين:

الأولى محصلة القوى الفعالة $\vec{F_i}$ والثانية $\vec{R_i}$ محصلة القوى الناتجة عن الارتباط. وبما أن الجملة متوازنة يكون:

$$\vec{F_i} + \vec{R_i} = 0$$

وبالضرب بـــ $\vec{\delta r_i}$ ثم الجمع بـــ i نجد:

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F_i} + \vec{R_i}) . \vec{\delta r_i} = 0 \qquad \textbf{(1.29)}$$

وبما أن الارتباط مثالي فلابد أن ينعدم الحد الثاني أي:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R_i} . \vec{\delta r_i} = 0$$

وبالتالي يكون $\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} . \vec{\delta r_t} = 0$ وهو المطلوب.

ب- كفاية الشرط: تتحقق العلاقة $\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} . \vec{\delta r_t} = 0$ ويطلب البرهان أن الجملة متوازنة.

نبرهن كفاية الشرط بطريقة نقض الفرض فنقول إما أن تكون الجملة متوازنة ويتحقق المطلوب وإما غير متوازنة وعندئذٍ فلابد أن تتحرك احدى نقطها M_i تحت تأثير القوة $\vec{F_i}$ وتعطي عملاً حقيقياً موجباً $\vec{F_i} . \vec{dr_i} > 0$. وقد رأينا أنه يمكن أن نجد انتقالاً افتراضياً $\vec{\delta r_i}$ ينطبق على انتقال حقيقي $\vec{dr_i}$ (راجع الفقرة 3) وبالتالي يكون $\vec{F_i} . \vec{\delta r_i} > 0$ ولما كانت الارتباطات مثالية فإننا

نجد: $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \delta\vec{r}_i > 0$ وهذا خلاف الفرض وبالتالي لابد أن تكون الجملة متوازنة وهو المطلوب.

كيف يصبح شرط التوازن السابق (1.28) عندما تتأثر الجملة بارتباطات أحادية الجانب يمكن أن تتحرر نقطها من القيد؟

تتحرر النقطة من القيد باتجاه رد الفعل وبالتالي يكون عمل رد الفعل موجباً أي أن $\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i . \delta\vec{r}_i > 0$ وطبقاً لـــ (1.29) نجد:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \delta\vec{r}_i < 0 \qquad \textbf{(1.30)}$$

وهو شرط توازن الجمل المادية المحررة. يمكن جمع الشرطين (1.29) و (1.30) بشرط واحد هو:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \delta\vec{r}_i \leq 0$$

على أن تأخذ إشارة المساواة للارتباطات الثنائية والمتراجحة للأحادية.

توازن نقطة مادية اعتمادا ، على مضاريب لاغرانج:

سندرس في هذه الفقرة والتي تليها طريقة ثانية لايجاد توازن نقطة مادية (جسيم) وجملة مادية، يمكن اعتماداً عليها، أن نحسب ردود الأفعال الناتجة عن الارتباط.

لتكن نقطة مادية M تتحرك على سطح معادلته (ارتباط مقيد):

$$f(x, y, z) = 0$$

وبالتالي كما رأينا سابقاً تتحقق العلاقة (1.11a)، ولنكتب شرط توازن النقطة M اعتماداً على مبدأ العمل الافتراضي ثم نضرب (1.11a) بمضروب اختياري λ (يسمى مضروب لاغرانج) ونضيف المعادلة الناتجة إلى شرط التوازن فنحصل على المعادلة:

$$\vec{F} . \delta\vec{r} + \lambda \nabla f . \delta\vec{r} = 0 \quad \textbf{(1.31)}$$

أو:

$$F_x.\delta x + F_y\delta y + F_z\delta_z + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z) = 0\right)$$

ومنه:

$$(F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x})\delta x + (F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y})\delta y + (F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z})\delta z = 0 \quad \mathbf{(1.32)}$$

ولكي تتحقق هذه المعادلة مهما كانت λ لايمكن أن نقول مباشرةً أن أمثال كل من $\delta z, \delta y, \delta x$ تساوي الصفر لأن الانتقالات المذكورة غير مستقلة فهي ترتبط فيما بينها بالمعادلة (1.11a).

ولكن إذا علمنا أن λ هو مضروب اختياري (تتحقق العلاقة $\nabla f.\vec{\delta r} = 0$ مهما كانت λ) فيمكن نزع اختيارية هذا المضروب وتحديد قيمته عن طريق انعدام أحد الأقواس (وليكن الثالث) في (1.32) أي أن:

$$F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \mathbf{(1.33)}$$

وبما أن للمسألة درجتي حرية فيمكن اعتبار $\delta y, \delta x$ انتقالين مستقلين وبالتالي يمكن أن نعدم أمثالهما وهكذا نجد بالاضافة إلى (1.33) المعادلتين:

$$F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \mathbf{(1.34)}$$

نضيف إلى المعادلات (1.33) و (1.34) معادلة الارتباط فنحصل على أربع معادلات كافية لحساب أربعة مجاهيل هي احداثيات موضع التوازن (x, y, z) و λ مضروب لاغرانج.

نعمم الطريقة السابقة عندما يتحرك الجسيم على منحنٍ ناتج عن تقاطع السطحين:

$$f_i(x, y, z) = 0 \quad , \quad (i = 1\,,\, 2) \quad \mathbf{(1.35)}$$

وعندئذٍ تتحقق الانتقالات الافتراضية المعادلتين:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_i}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_i}{\partial z}\delta z = 0 \quad \mathbf{(1.36)}$$

نكتب الآن شرط التوازن (1.28) ونضيف له المعادلتين (1.36) بعد الضرب بـــ λ_i (مضروبين اختياريين) فنحصل أخيراً على المعادلة:

$$(F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x})\delta x + (F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y})\delta y +$$
$$(F_z + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z})\delta z = 0 \qquad \mathbf{(1.37)}$$

ننزع اختيارية المضروبين λ_1 و λ_2 فنعينهما بمساواة قوسين من الأقواس الثلاثة السابقة بالصفر فنحصل على معادلات التوازن التالية (تعميم للمعادلات (1.33)، (1.34)):

$$\left.\begin{aligned} F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0 \\ F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0 \\ F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{(1.38)}$$

نضيف إلى المعادلات (1.38) معادلتي الارتباط (1.35) فنحصل أخيراً على خمس معادلات لتعيين موضع التوازن (x,y,z) وحساب λ_1 ، λ_2.

ومن المفيد في نهاية هذه الفقرة توضيح المفهوم الفيزيائي لمضاريب لاغرانج، لهذا نكتب معادلات التوازن النيوتنية لجسيم يتحرك على سطح ونقارنها مع المعادلات التي حصلنا عليها عن طريق الميكانيك التحليلي. في الأولى نجد:

$$\vec{F} + \vec{R} = 0 \Rightarrow F_x + R_x = 0, F_y + R_y = 0, \ F_z + R_z = 0 \quad \mathbf{(1.39)}$$

وفي الثانية نجد المعادلات (1.33) و (1.35) وبالمقارنة نحصل على رد الفعل التالي:

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \ , \ R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \ , \ R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

أي أن:

$$\vec{R} = \lambda \nabla f = \lambda \text{ grad } f \quad \textbf{(1.40)}$$

وهكذا نجد أن المضروب λ يرتبط برد الفعل.

وعندما يتحرك الجسيم على منحني نحصل على رد الفعل التالي:

$$\textbf{(1.41)} \quad \vec{R} = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2$$

فكأننا قسمنا رد فعل المنحني (المؤلف من تقاطع سطحين) إلى قسمين: الأول $\lambda_1 \nabla f_1$ ينتج عن السطح الأول والثاني $\lambda_2 \nabla f_2$ عن السطح الثاني.

7- توازن جملة مادية بطريقة مضاريب لاغرانج – معادلات لاغرانج (النوع الأول):

نعمم ماسبق على توازن جملة مادية مؤلفة من N نقطة خاضعة لارتباطات هولونومية ثنائية الجانب من النوع (1.13).

يمكن وضع رد الفعل المؤثر على النقطة M_i من الجملة كتعميم للعلاقة (1.41) حيث نجد:

$$\vec{R_i} = \lambda_1 \nabla_1 f_1 + \lambda_2 \nabla_1 f_2 \ldots \lambda_k \nabla_i f_k = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha \quad \textbf{(1.42)}$$

وعندئذٍ نكتب معادلات التوازن:

$$\left.\begin{aligned} X_i + \sum_\alpha \lambda_a \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = 0 \\ Y_i + \sum_\alpha \lambda_a \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} = 0 \\ Z_i + \sum_\alpha \lambda_a \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(1.43)}$$

حيث (X_i, Y_i, Z_i) هي مركبات محصلة القوى الفعالة المؤثرة على النقطة M_i، مع العلم أن عدد المجاهيل هنا هو $3N+k$ مجهولاً. ولكي نحسب كل هذه المجاهيل لابد من الاستفادة من k معادلة ارتباط وهكذا نحصل على

$(3N+k)$ معادلة كافية لحساب (x_i, y_i, z_i) موضع توازن النقطة M_i $(i=1,2,...,N_i)$ و k مضروب لاغرانج λ_α $(\alpha=1,2,...,k)$.

يسهل الآن الحصول على مايسمى معادلات لاغرانج (النوع الأول) بوضع معادلة حركة النقطة M_i ذات التسارع $\vec{W_i}$ والمتأثرة بقوى محصلتها $\vec{F_i}$ وردود فعل محصلتها $\vec{R_i}$ معطاة بالعلاقة (1.42) حيث نجد:

$$m_i.\vec{W_i} = \vec{F_i} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha \quad \textbf{(1.44)}$$

التي تصبح بالاسقاط على المحاور الإحداثية:

$$\left.\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= X_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \\ m_i \ddot{y}_i &= Y_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \\ m_i \ddot{z}_i &= Z_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(1.45)}$$

وهي عبارة عن $3N$ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية غير كافية لحساب قوانين الحركة (x_i, y_i, z_i بدلالة الزمن وثوابت الحركة). لذلك نضيف لها k معادلة ارتباط فنحصل على $3N+k$ مجهولاً كافية لحساب $\vec{r_i}$ بدلالة الزمن (قوانين الحركة) وهي من الشكل:

$$\vec{r_i} = \vec{r_i}(t, \vec{C_1}, \vec{C_2}, ..., \vec{C_N}) \quad \textbf{(1.46)}$$

و k مضروب لاغرانج λ_α الذي يرتبط برد الفعل طبقاً للمعادلة (1.42).

من الواضح أن عدد المعادلات السابقة كبير جداً وبالتالي يصعب حلها يدوياً وبالرغم من ذلك قد يكون من الضروري الاستفادة منها في الانشاءات

الهندسية كبناء الجسور والأبراج وغيرها، وعندئذٍ توضع برامج حاسوبية لحل المعادلات وحساب المجاهيل.

أما عندما لانهتم بردود الفعل فنستخدم معادلات لاغرانج من النوع الثاني التي عددها أقل وهو $(3N-k)$ معادلة فقط، وبالتالي يسهل حلها، والتي سنراها في الفصل الثاني.

الحصول على تكامل الطاقة انطلاقا ً من معادلات لاغرانج:

يمكن الحصول على تكامل الطاقة انطلاقاً من المعادلات السابقة، ولهذا نضرب أطراف المعادلات (1.45) بـــ dz_i, dy_i, dx_i على الترتيب ونجمع بـــ i ثم نجمع المعادلات الثلاث الناتجة طرفاً إلى طرف فنجد:

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{x}_i dx_i + m_i\ddot{y}_i dy_i + m_i\ddot{z}_i dz_i) = \sum_{i=1}^{N}(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{\alpha}\left(\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}dx_i + \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}dy_i + \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}dz_i + \right)\right] \quad \mathbf{(1.47)}$$

نضع الحدود الثلاثة الأولى بالصيغة التالية:

$$\sum_i m_i\left(\dot{x}_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} + \dot{y}_i \frac{d\dot{y}_i}{dt} + \dot{z}_i \frac{d\dot{z}_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = dT \quad \mathbf{(1.48)}$$

أما الحدود الثلاثة التي تليها فيمكن وضعها كمايلي بفرض أن القوة $\vec{F}_i$ تشتق من كمون V:

$$\mathbf{(1.49)}$$

$$\sum X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i = -\left(\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}dz_i\right) = -dV$$

أما الحدود الثلاثة الأخيرة (راجع (1.16) بعد ضربها بـــ λ_α وجمعها α فتساوي:

$$\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}\sum_{i}\left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i}dz_i\right)=\sum_{\alpha}\left(\sum_{i}\lambda_{\alpha}\nabla_i f_{\alpha}\cdot d\vec{r_i}\right)$$
$$=-\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}dt \quad \mathbf{(1.50)}$$

وبتعويض $(1.48)-(1.50)$ في (1.47) نجد:

$$dT=-dV-\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}dt \quad \mathbf{(1.51)}$$

فإذا فرضنا أن الارتباطات مستقرة (لاتحوي الزمن بشكل صريح) فإننا نحصل من (1.51) على تكامل الطاقة التالي:

$$d(T+V)=0\Rightarrow T+V=E=\text{Const.} \quad \mathbf{(1.52)}$$

توجيهات لحل مسائل التوازن اعتماداً على المبدأ التوازني للانتقالات الافتراضية:

1- رسم الشكل جيداً وتطبيق القوى المؤثرة عليه.

2- اختيار وسطاء المسألة المستقلة وهي عدد الإحداثيات المستقلة اللازمة (لوصف) الجملة المادية، وقد يكون هذا البند أهم من غيره لأن النجاح في حل المسالة يتوقف بصورة أساسية على صحة هذا الاختيار. ولعل من المفيد أن نذكر طريقة بسيطة لذلك تعتمد على تثبيت أجزاء الجملة بالتتالي على أن تثبت في كل مرة وسيطاً واحداً فيكون عدد مرات التثبيت هو بالضبط عدد الاحداثيات المستقلة اللازمة لدراسة الجملة. **ولنذكر بعض الأمثلة على ذلك:**

أ- إن عدد الاحداثيات اللازمة لدراسة نقطة مادية طليقة لاتخضع لأي أربطة، هي ثلاث؛ لأن هذه النقطة يمكن أن تتحرك في ثلاثة اتجاهات موافقة لثلاثة محاور إحداثية oxyz. فإذا ثبتنا الحركة على ox فإن النقطة لن تثبت (الوسيط الأول) ثم إذا ثبتنا الحركة على oy فإن النقطة لن تثبت أيضاً (الوسيط الثاني) وأخيراً إذا ثبتنا الحركة على oz فإن الحركة تثبت تماماً (الوسيط الثالث والأخير) وهكذا يكون للنقطة المادية الطليقة ثلاث وسطاء نرمز لها بـــ z و y و x في الاحداثيات الديكارتية ويكون شرط توازنها هو التالي:

$$\sum \vec{F_i}.\vec{\delta r_i} = 0 \Rightarrow \vec{F}.\vec{\delta r} = 0 \Rightarrow F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = 0 \quad \textbf{(1.53)}$$

ولكي تتحقق المعادلة السابقة لابد أن يكون أمثال كل من δx و δy و δz تساوي الصفر لأن جميع هذه الانتقالات مستقلة في هذه الحالة. وهي النتيجة نفسها التي نعرفها من الطريقة العامة المبنية على ميكانيك نيوتن في التوازن.

ب- إذا تحركت النقطة المذكورة في المثال السابق على سطح ما معادلته $f(x,y,z)=0$ فإن عدد الوسطاء المستقلة ينقص إلى (2) فقط لأن عدد الوسطاء اللازمة لدراسة هذه النقطة فيما لو كانت طليقة يساوي ثلاثة (x,y,z) وهي ليست مستقلة الآن لأنها ترتبط بمعادلة السطح، وهكذا يكفي معرفة اثنين من الإحداثيات لأن الثالث يعرف من معادلة السطح. أما إذا تحركت النقطة على منحني يمكن أن يفهم على أنه تقاطع سطحين في الفراغ هما:

$$f_1(x,y,z)=0 \quad , \quad f_2(x,y,z)=0 \qquad \textbf{(1.54)}$$

وهكذا يكفي معرفة وسيط واحد (x أو y أو z) لكي نعرف الوسيطين الباقيتين من معادلتي السطحين.

ج- على الشكل (1.3) يوجد للمسألة وسيطان مستقلان هما φ و ρ وسبب ذلك أنه إذا ثبتنا دوران المحور (تثبيت φ)، فإن الجملة المادية لن تثبت ككل لأن الحلقة يمكن أن تتحرك على المحور Δ ولكن إذا ثبتنا أيضاً الحلقة على Δ (أي ثبتنا ρ) فإن الجملة تثبت كلها وهكذا يكون للمجموعة وسيطان مستقلان هما ρ و φ ولكن أحدهما معلوم من نص المسألة وهو φ وبالتالي يكفي معادلة واحدة لدراستها.

د- على الشكل (1.6) (انظر مسائل الفصل) يكون للمسألة وسيط واحد كما رأينا ويمكن برهان ذلك بسهولة طبقاً لطريقة التثبيت المذكورة، وبالفعل إذا ثبتنا الذراع oA (تثبيت الزاوية φ) فإن الجملة تتثبت كلها وهكذا يكون للجملة وسيط واحد هو φ ويكفي اختيار هذا الوسيط بمثابة البعد بين O والمكبس B (أي x) لأن x و φ ترتبطان بالعلاقة (2).

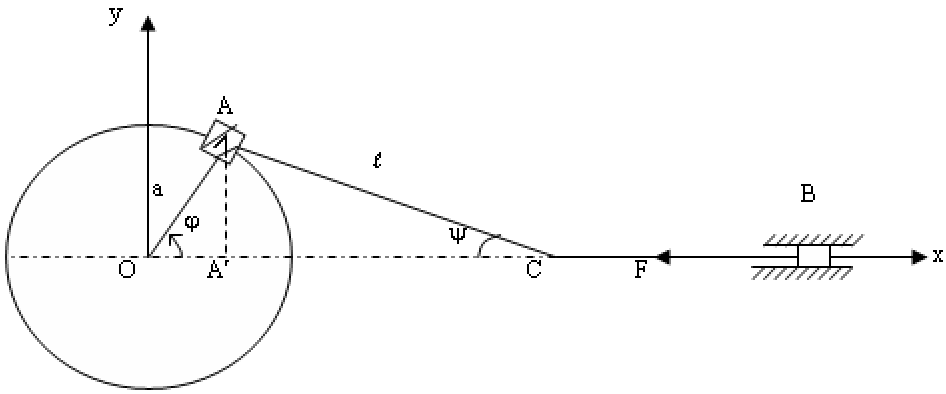
هــ- عارضة تتحرك في مستو شاقولي تحت تأثير ثقلها. ماهو عدد الوسطاء المستقلة؟

إن عدد الوسطاء اللازمة لدراسة حركتها هو ثلاثة لأن تثبيت مركز كتلتها C هنا ثبتنا وسيطين مرة واحدة هما (x(C) و y(C)) لايؤدي إلى إيقاف حركتها ككل (أن هذه العارضة يمكن أن تدور حول محور يمر من مركز كتلتها. فإذا ثبتنا الدوران (تثبيت الزاوية φ) فإن هذا يؤدي إلى ثبات الجملة ككل وبالتالي يكون للمسألة ثلاثة وسطاء هي x(C) و y(C) و φ. وفي الحالة الخاصة عندما تثبت نقطة O من العارضة فإنه يكفي وسيطاً واحداً لدراستها بسبب إمكانية الدوران حول O بزاوية φ تؤخذ كوسيط مستقل للمسألة.

3- حساب العمل الافتراضي للقوى الفعالة المؤثرة في الجملة، ويجب أن يتم هذا الحساب حصراً بدلالة وسطاء المسألة المستقلة المختارة، وبالاستفادة من المعادلة (1.28) نحصل على مجموعة معادلات عددها يساوي عدد درجات الحرية (عدد الوسطاء المستقلة للمسألة) هي بالضبط معادلات التوازن التي يمكن أن نحسب منها ماهو مطلوب في المسألة.

مسائل وتمارين

1- لتكن الجملة شكل (1.6) حيث B مكبس يتحرك ضمن اسطوانة وهو متصل بذراع CA طوله ℓ ينتهي بصامولة A وقد ثبت مفصلياً بالصامولة ذراع آخر OA طوله a طرفه الآخر مثبت بنقطة ثابتة O (جملة تحويل الحركة الانسحابية إلى حركة دورانية وهي موجودة في كل المحركات ذات الاحتراق الداخلي). يطلب ايجاد معادلات الارتباط وحساب الانتقالات الافتراضية، بفرض أن الجملة مؤلفة من نقطتين فقط هما المكبس B والصامولة A.



الشكل (1.6)

الحل:

من الواضح أن الحركة تحدث في مستوي وبالتالي يمكن تعيين كل من A و B باحداثيين فقط هما $B(x, y)$ و $A(\rho, \varphi)$ (انظر الشكل). أما معادلات الارتباط فهي:

$$y = 0 \ , \ \rho = a \quad (1)$$

ولابد من وجود معادلة ثالثة لأن الجملة ككل تثبت بتثبيت الزاوية φ وبالتالي يكون لها وسيط واحد. ونلاحظ من الشكل أن:

$$x = a \cos \varphi + \ell \cos \psi + \text{const.} \quad (2)$$

وهنا أضفنا وسيطاً جديداً هو ψ يمكن حسابه بدلالة φ حيث نجد من الشكل :

$$a \sin \varphi = \ell \sin \psi \Rightarrow \cos \psi = \sqrt{1 - \frac{a^2}{\ell^2} \sin^2 \varphi} \qquad (3)$$

نبدل ψ بقيمتها من (3) في (2) فنجد:

$$x = a \cos \varphi + l \sqrt{1 - \frac{a^2}{\ell^2} \sin^2 \varphi} + \text{Const.} \quad (4)$$

وهي معادلة الارتباط الثالثة وبالتالي يكون عدد وسطاء المسألة المستقلة هو وسيط واحد نختاره الزاوية φ، أي أن للمسألة درجة حرية واحدة.

أما الانتقالات الافتراضية فهي:

$$\delta\rho = 0 \ , \ \delta y = 0 \ , \ \delta\varphi \neq 0 \ (5)$$

أما δx فتحسب بدلالة $\delta\varphi$ من (4) حيث نجد:

$$\delta x = -\left(a \sin \varphi + \frac{\frac{a^2}{\ell} \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{\ell^2} \sin^2 \varphi}} \right) \delta\varphi \ (6)$$

2- ادرس توازن العارضة الموضحة على الشكل (1.5) بفرض أن القوة الفعالة الوحيدة المؤثرة هي ثقل العارضة المركز في مركز ثقلها C.

الحل:

ان شرط التوازن هو :

$$\vec{F} . \delta \vec{r} = 0 \Rightarrow m \vec{g} . \delta \vec{C} = 0 \ (1)$$

ومنه:

$$- mg \, \delta y(C) = 0 \ (2)$$

لحساب $\delta y(C)$ نستفيد من (1.27b).

حيث نجد:

$$\delta y(C) = -a \sin \theta \, \delta\theta + a\delta\theta \sin \theta + a\theta \cos \theta \, \delta\theta - h \sin \theta \, \delta\theta \quad (3)$$

فإذا بدلنا في (2) نجد العلاقة التي تحققها θ_0 في وضع التوازن:

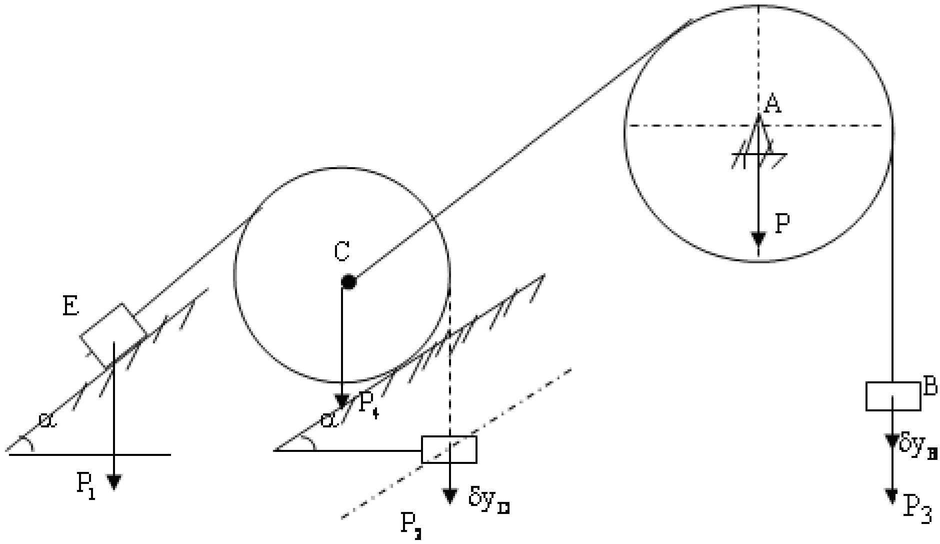
$$(a\theta_0 \cos \theta_0 - h \sin \theta_0)\delta\theta = 0$$

ومنه نحصل على قيمة θ التالية:

$$tg\, \theta = tg\, \theta_0 = \frac{a}{h}\theta_0 \quad (4)$$

ومن الواضح أن هذه العلاقة لاتتحقق إلا عندما $\theta_0 \approx 0$. والجدير بالذكر أنه عندما نصل سماكة العارضة $h \to 0$ فلن تتحقق العلاقة السابقة الا عندما $\theta_0 \to 0$. وهي نتيجة منطقية لأن التوازن يحدث عندما تكون العارضة أفقية وترتكز على ذروة الكرة $(\theta_0 = 0)$.

<u>3-</u> لتكن الجملة الموضحة على الشكل (1.7) حيث A بكرة ثقلها P يمكنها الدوران حول محور أفقي ثابت وقد علق في محزها خيط ينتهي طرفه الأول بثقل P_3 بينما ينتهي طرفه الثاني ببكرة ثانية C ثقلها P_4 يمكنها التدحرج دون انزلاق على مستوٍ يميل على الأفق بزاوية α، وقد علق في محزها خيط آخر ينتهي أحد طرفيه بكتلة D ثقلها P_2 بينما ينتهي الطرف الآخر بثقل E قدره P_1 موضوع على مستوٍ يميل على الأفق بزاوية α أيضاً شكل (1.7) إحسب قيمة الثقل P_3 والزاوية α بدلالة الأثقال P_4, P_2, P_1 في حالة توازن الجملة.



الشكل (1.7)

الحل:

إذا اتبعنا طريقة التثبيت المذكورة في الفقرة (9) لمعرفة عدد الوسطاء المستقلة نلاحظ أن عند تثبيت الثقل P_3 لن تثبت الجملة لأن البكرة C يمكنها الدوران. أما إذا ثبتنا هذا الدوران فإن الجملة ككل تثبت وبالتالي يوجد درجتا حرية.

سنأخذ الوسيطين التاليين المقابلين لهما: هبوط الثقل P_3 أي y_B وهبوط الثقل D أي y_D. من المفيد أن نذكر طريقة ثانية لتحديد عدد الوسطاء المستقلة فنقول أنه موضع الثقل E يتعين بمعرفة بعده عن نهاية المستوي المائل أما البكرة الثانية C فيمكن تعيين موضعها بوسيطين فقط هما دورانها وانسحاب مركز كتلتها. ويتعين مكان الثقل D باحداثيه الشاقولي y_D أما البكرة A ، التي تدور حول نقطة ثابتة، فيتعين موضعها بزاوية ما وأخيراً نعين موضع الثقل B باحداثيه الشاقولي y_B ويكون مجموع الوسطاء غير المستقلة هو ستة وسطاء. فإذا علمنا أن حركة الثقل E ودوران البكرة C يتعينان بهبوط الثقل D وأن حركة مركز كتلته البكرة C ودوران البكرة A يتعينان بهبوط الثقل B فسنجد أن

الوسطاء الستة غير المستقلة تنخفض بمقدار أربعة وبالتالي يكون عدد الوسطاء المستقلة هو $(6-4=2)$.

نذكر أخيراً طريقة ثالثة لتعيين عدد الوسطاء المستقلة تتلخص بكتابة معادلات الارتباط الأربع التالية:

أ- طول الخيط الأول ثابت.

ب-طول الخيط الثاني ثابت.

ج- معادلة المستوي المائل الأول.

د- معادلة المستوي المائل الثاني.

وهكذا يصبح عدد الوسطاء المستقلة 2=4-6 كما رأينا سابقاً.

لننتقل الآن لايجاد المجهولين المطلوبين ولهذا نحسب العمل الافتراضي بعد ملاحظة أنه عندما يهبط الثقل B يجر معه الثقل D الذي يبدو كأنه يتحرك على مستوٍ مائل بزاوية α وهكذا نجد:

$$-P_1 \sin\alpha\delta y_D + P_2\delta y_D - P_1 \sin\alpha\delta y_B - P_2 \sin\alpha\delta y_B - P_4 \sin\alpha\delta y_B + P_3\delta y_B = 0 \quad \textbf{(1)}$$

ومن الحدين الأولين نجد:

$$P_2 = P_1 \sin\alpha \qquad (2)$$

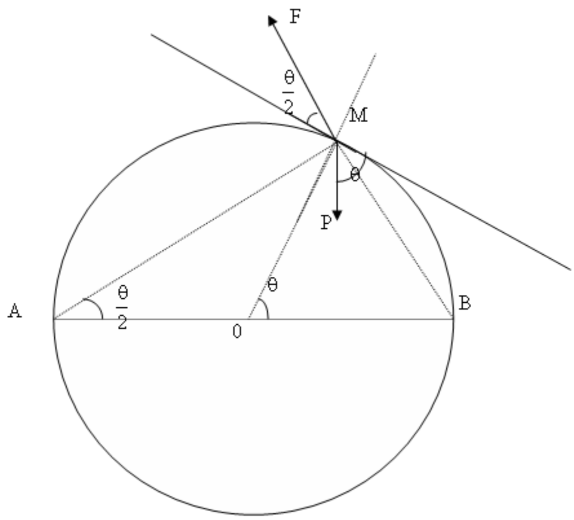
ومن الحدود الأربع الباقية نجد:

$$(P_1 + P_2 + P_4)\sin\alpha = P_3 \quad (3)$$

فإذا بدلنا $\sin\alpha$ بقيمتها من (2) في (3) نحصل على قيمة الثقل P_3 الذي يؤمن التوازن وهي:

$$P_3 = \frac{P_2}{P_1}(P_1 + P_2 + P_4)$$

<u>4-</u> تتحرك حلقة ثقيلة على سلك دائري ثابت نصف قطره a يقع في مستوٍ شاقولي شكل (1.8). ادرس توازن هذه الحلقة علماً أنها تتأثر بقوة ثابتة $\vec{F} = k\,\vec{BM}$ (انظر الشكل) وأن الارتباط مثالي.



الشكل (1.8)

الحل:

شرط التوازن هو:

$$\sum_i \vec{F}_i . \vec{\delta r}_i = 0 \qquad (1)$$

نسقط على المماس فنجد أن العمل الافتراضي يساوي:

$$F_T \delta r_T + P_T \delta r_T = 0 \qquad (2)$$

مع العلم أن عمل القوى الناظمية يساوي الصفر. نلاحظ أن:

$$F_T = F\cos\frac{\theta}{2} = k.2a\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2} = ak\sin\theta \quad (3)$$

$$P_T = P\cos(\pi - \theta) = -P\cos\theta \quad (4)$$

$$\delta r_T = a\delta\theta \qquad (5)$$

نبدل (3) و (4) و (5) في (2) فنجد:

$$(ka^2 \sin\theta - P\cos\theta)\delta\theta = 0$$

ومنه نحسب الزاوية θ_0 المقابلة لوضع التوازن:

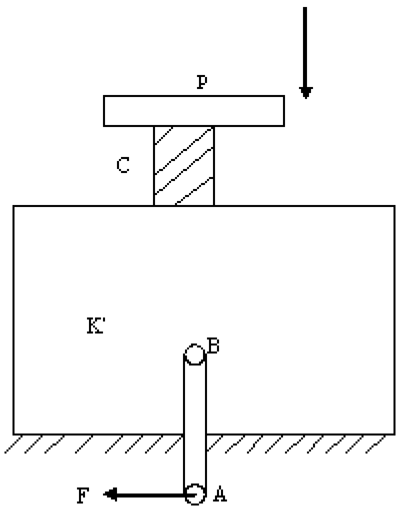
$$tg\theta_0 = \frac{P}{ka^2}$$

5- تتحرك حلقة ثقيلة M على سلك لولبي معادلته:

$$x = a\cos\theta \ , \ y = a\sin\theta \ , \ z = b\theta$$

وتتأثر بقوة مرونة، ناتجة عن ربط الحلقة بنابض طرفه الثاني مثبت في مركز الاحداثيات، هي $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{OM}$ يطلب دراسة توازن الحلقة M وحساب رد الفعل في موضع التوازن.

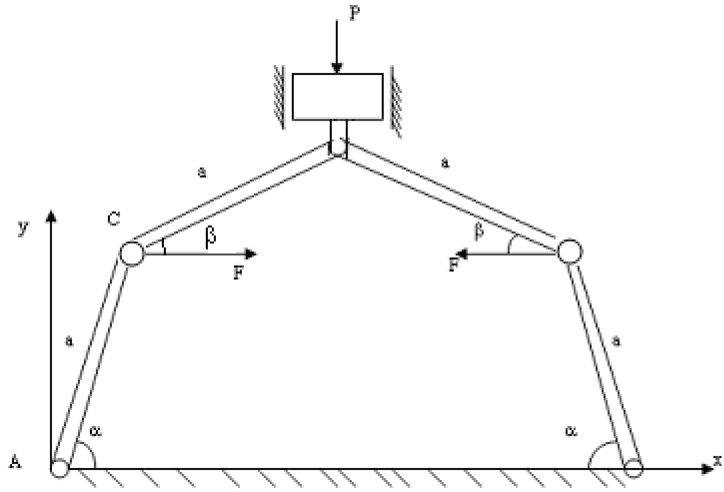
6- يتم رفع ثقل P عن طريق التأثير بقوة F على ذراع طوله ℓ شكل (1.9) يدور صامولة خطوتها b ترفع بدورها الثقل إلى أعلى (رافعة السيارة). احسب العلاقة بين القوتين: القوة المحركة $\vec{F}$ والقوة المقاومة $\vec{P}$ لكي يتم توازن الجملة.



الشكل (1.9)

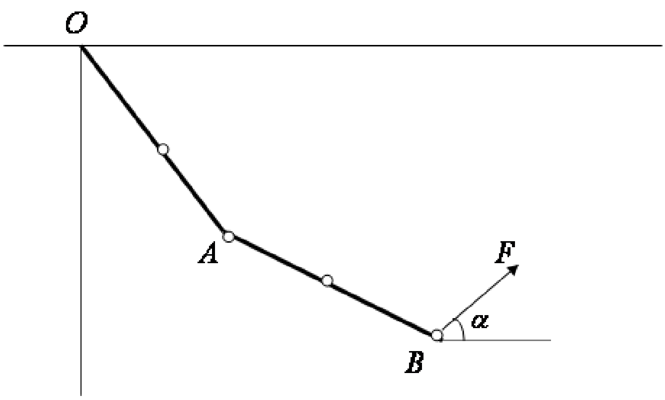
7- ادرس توازن نقطة مادية ثقيلة على كرة بطريقة مضاريب لاغرانج.

8- اوجد العلاقة بين القوتين $\vec{F}$ و $\vec{P}$ لكي يتم توازن الجملة الموضحة على الشكل (1.10) مع العلم أن كافة الأذرع متجانسة ومتساوية الطول وأن البعد AB ثابت.



شكل (1.10)

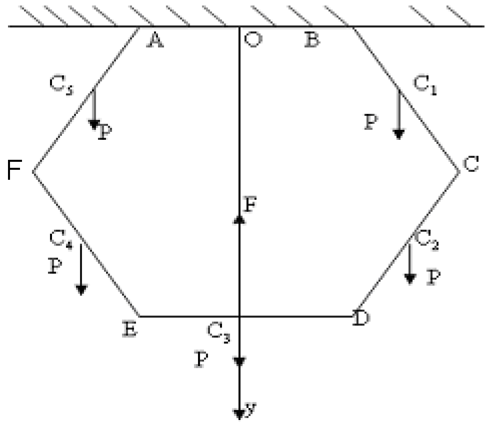
9- عارضتان ثقيلتان متجانستان OA و AB متمفصلتان في A، و O مفصل ثابت. تؤثر على النهاية B قوة نصنع زاوية α مع الأفق احسب القوة $\vec{F}$ في وضع التوازن شكل (1.11).



الشكل (1.11)

10- اعد حل المسألة السابقة عندما يكون لدينا ثلاثة عوارض BC, AB, OA متمفصلة في A و O .B مفصل ثابت. تؤثر على C (نهاية BC) قوة أفقية $\vec{F}$.

11- مسدس ABCDEF مؤلف من ستة أضلاع ثقيلة متماثلة ومتجانسة طول كل منها a وثقله $\vec{P}$ تؤثر على الضلع ED قوة شاقولية تجعل المسدس يتوازن في وضعه المنتظم. احسب هذه القوة.

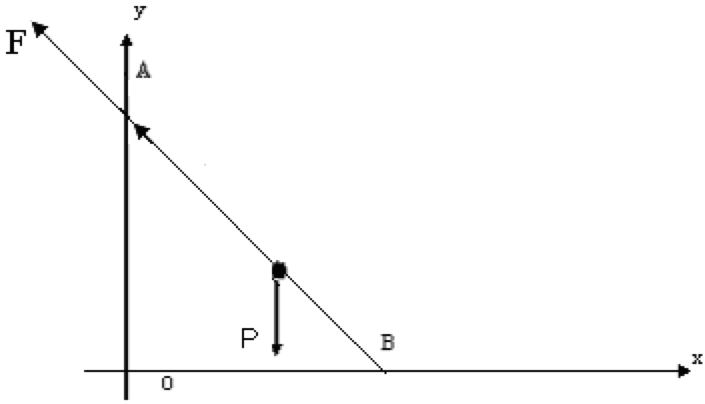


الشكل (1.12)

12- كتلتان ماديتان ثقيلتان يمكنهما الحركة على مستويين مائلين وهما مربوطتان بخيط يمر على بكرة مثبتة في النقطة A (نقطة تلاقي المستويين). اوجد شرط التوازن.

13- أعد حل المسألة السابقة عندما يستبدل الخيط بخيط مرن بحيث تتأثر كلتا الكتلتين بالإضافة إلى ثقلهما بقوتي مرونة $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$.

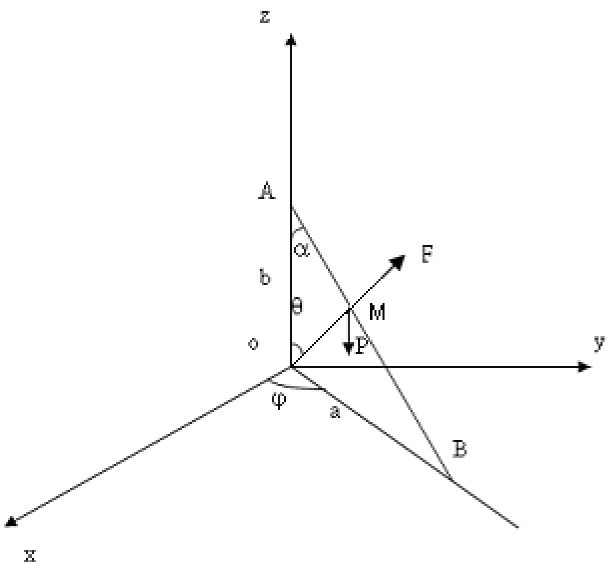
14- اوجد موضع توازن حلقة ثقيلة تتحرك على سلك ثابت AB يقع في مستوٍ شاقولي وتتأثر بقوة ثابتة $\vec{F}$ تمر من النقطة A شكل (1.13).



الشكل (1.13)

<u>15-</u> أعد حل المسألة (4) عندما تتأثر الحلقة بالقوة $\vec{F} = +k\,\vec{AM}$.

<u>16-</u> تتحرك حلقة ثقيلة M على محور AB يقع في مستوٍ شاقولي يصنع زاوية ثابتة φ مع المستوي xoz. يؤثر في الحلقة، بالاضافة إلى ثقلها، قوة دفع $\vec{F} = k\,\vec{OM}\ (k > 0)$ شكل (1.14). ادرس توازن الحلقة.



الشكل (1.14)

1- اكتب معادلات الارتباط وبرهن أن للمسألة وسيط واحد.

2- ادرس توازن الحلقة اعتماداً على مبدأ العمل الافتراضي.

الفصل الثاني

معادلات الحركة

رأينا في الفصل السابق كيف نحل مسألة توازن مجموعة مادية عن طريق الميكانيك التحليلي. وسنتابع هذا المسعى فنرى كيف يمكن كتابة معادلات الحركة أيضاً وايجاد قوانينها، ويتم ذلك بعدة طرق من أهمها معادلات لاغرانج التي سنراها في هذا الفصل.

10- المبدأ الديناميكي (التحريكي) للانتقالات الافتراضية (معادلة دالمبير- لاغرانج):

لنكتب معادلة حركة النقطة M_i من المجموعة المادية المدروسة طبقاً لـــ (1.44) ثم نضرب طرفي المعادلة الناتجة بـــ $\delta \vec{r_i}$ ونجمع أخيراً بـــ i فنحصل على المعادلة التالية:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F_i}-m_i\,\vec{W_i}\right).\delta\,\vec{r_i}+\sum_{i=1}^{N}\vec{R_i}\,.\delta\,\vec{r_i}=0 \qquad (\mathbf{2.1})$$

وإذا فرضنا أن المجموعة المادية تتأثر بارتباطات مثالية هولونومية ثنائية الجانب لاغير ورمزنا للمقدار $m_i W_i$ بـــ J_i (قوة العطالة) فإن المعادلة (2.1) توضع كمايلي:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F_i}-m_i\,\vec{W_i}\right).\delta\,\vec{r_i}\equiv\sum_{i=1}^{N}(\vec{F_i}+\vec{J_i}).\delta\,\vec{r_i}=0 \qquad (\mathbf{2.2})$$

أو بالشكل:

$$\sum\left[\left(X_i-m_i\ddot{x}_i\right)\delta x_i+\left(Y_i-m_i\ddot{y}_i\right)\delta y_i+\left(Z-m_i\ddot{z}_i\right)\delta z_i\right]=0 \quad (\mathbf{2.3})$$

تسمى هذه المعادلة أحياناً معادلة دالمبير–لاغرانج وهي تعبر عما يسمى المبدأ الديناميكي للانتقالات الافتراضية الذي ينص على مايلي:

"تجرى حركة مجموعة مادية خاضعة لارتباطات مثالية هولونومية بحيث يكون مجموع الأعمال الافتراضية لكافة القوى المؤثرة عليها (القوى الفعالة وقوى العطالة) يساوي الصفر".

ومن الواضح أنه لكي تتحقق المعادلة (2.3) في الحالة العامة لايمكن أن نقول إن أمثال الانتقالات الافتراضية $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ يجب أن تساوي الصفر لأن هذه الانتقالات غير مستقلة فهي ترتبط فيما بينها بـــ k معادلة من النوع (1.15).

لنبحث، على سبيل المثال، عن معادلة حركة نقطة مادية واحدة طليقة M اعتماداً على المعادلة (2.3) حيث تكون وسطاء المسألة المستقلة هي إحداثيات النقطة M أي (x, y, z) وتكون كافة الانتقالات δx و δy و δz مستقلة وبالتالي لكي تتحقق المعادلة (2.3) يجب أن يكون:

$$X - m\ddot{x} = 0 \;,\; Y - m\ddot{y} = 0 \,,\, Z - m\ddot{z} = 0$$

ومنه $m\vec{W} = \vec{F}$ وهي معادلة حركة نقطة مادية طليقة كما يراها نيوتن.

لنعمم المعادلة (2.2) على الارتباطات المحررة، ولذا نتذكر ما رأيناه في الفصل السابق ان الانتقال يحدث بتأثير قوى الربط ولهذا يكون عملها موجباً وعندئذٍ نجد من المعادلة (2.1) أن:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\,\vec{W}_i\right).\delta\,\vec{r}_i < 0 \qquad (\mathbf{2.4})$$

وبدمج المعادلتين (2.2)، (2.4) مع بعضهما نحصل على التعبير الرياضي للمبدأ الديناميكي للانتقالات الافتراضية:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\,\vec{W}_i\right).\delta\,\vec{r}_i \le 0 \qquad (\mathbf{2.5})$$

"أي أن مجموع الأعمال الافتراضية الجزئية للقوى الفعالة وقوى العطالة (أو مايسمى أحياناً محصلة القوى الضائعة) المؤثرة في مجموعة مادية لايمكن أن يكون موجباً.

والجدير بالذكر أن بعض المؤلفين لا يأخذون بعين الاعتبار الارتباطات الأحادية، إذ أن أية نقطة مادية تخضع لارتباطات أحادية تعتبر طليقة عندما تتحرر من القيد وتعامل معاملة النقطة الطليقة، وطالما أنها موجودة على القيد فإننا نعتبر ارتباطها ثنائياً (انظر المرجع 6).

11- الاحداثيات المعممة، السرع المعممة:

لنبحث عن معادلات حركة مجموعة مادية مؤلفة من N نقطة تخضع لـ k ارتباطاً مقيداً، لذا نختار عدداً n من الاحداثيات الجديدة نرمز لها بالرمز q_j حيث $(j = 1, 2, ..., 3N - k)$.

نسمي هذه الاحداثيات التي عددها $n = 3N - k$ (بعدد درجات الحرية للمجموعة المادية) نسميها الاحداثيات المعممة ونختارها بحيث تحقق شرطين أساسيين:

1- أن يعبر عن الإحداثيات القديمة x_i و y_i و z_i بدلالة الإحداثيات الجديدة بتوابع مستمرة ووحيدة التعيين وقابلة للاشتقاق بقدر مانريد ويمكن أن تحوي الزمن بشكل صريح.

2- أن تحقق معادلات الارتباط تطابقاً.

مثال:

عندما تتحرك نقطة على كرة نصف قطرها a فإن معادلة الارتباط هي:

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ ويكون عدد درجات الحرية هو $3 - 1 = 2$. نختار الاحداثيين المعممين التاليين $q_2 = y$ و $q_1 = x$ وعندئذٍ يمكن حساب z من معادلة الكرة حيث نجد: $z = \sqrt{a^2 - q_1^2 - q_2^2}$ وجميعها توابع مستمرة ووحيدة التعيين.

أما معادلة الارتباط فتحقق تطابقاً أي أن:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \Rightarrow q_1^2 + q_2^2 + a^2 - q_1^2 - q_2^2 - a^2 = 0$$

هذا ويمكن اختيار الاحداثيات المعممة التالية $q_1 = \theta,\ q_2 = \varphi$ وعندئذٍ يعبر عن الاحداثيات القديمة x, y, z للنقطة بدلالة الاحداثيات المعممة بالشكل:

$$x = a \sin q_1 \cos q_2 ,\ \ y = a \sin q_1 \sin q_2 \ , z = a \cos q_1$$

وهي توابع مستمرة ووحيدة التعيين وقابلة للاشتقاق دوماً، أما معادلة الارتباط فتكون:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \Rightarrow a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta - a^2 = 0$$

وهي تحقق تطابقاً كما نرى.

وهكذا نعبر عن الاحداثيات x_1 و y_i و z_i في الحالة العامة بدلالة الاحداثيات الجديدة والزمن بالعلاقات:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i (q_1, q_2, ..., q_n, t), (i = 1,2,..., N) \qquad (\mathbf{2.6})$$

أو:

$$x_i = x_i (q_1, q_2, ..., q_n, t),\ y_i = y_i (q_1, q_2, ..., q_n, t),$$
$$. z_i = z_i (q_1, q_2, ..., q_n, t) \qquad (\mathbf{2.7})$$

لنعبر عن سرعة النقطة M_i في الإحداثيات الجديدة ولهذا نشتق (2.6) بالنسبة للزمن:

$(\mathbf{2.8})$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + ... + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

تسمى مشتقات الاحداثيات المعممة بالنسبة للزمن، أي $\dot{q}_j$، بالسرع المعممة.

ويبدو بوضوح من (2.8) عند اشتقاقها جزئياً بالنسبة لـــ $\dot{q}_j$ أن:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \qquad (\mathbf{2.9})$$

12- معادلات الحركة:

للحصول على معادلات الحركة ينبغي "ترجمة" المبدأ الديناميكي للانتقالات الافتراضية (2.2) إلى لغة الإحداثيات المعممة، ولذا نحسب حدوده حداً فحداً، نحسب أولاً $\delta \vec{r_i}$ فنجد:

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \qquad (\mathbf{2.10})$$

أما العمل الافتراضي للقوى الفعالة $\sum_i^N \vec{F_i}.\delta \vec{r_i}$ فيوضع عندئذٍ بالشكل:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}.\delta \vec{r_i} = \sum_i \sum_j \vec{F}_i.\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \partial q_j = \sum_j^N \sum_i \left(\vec{F_i}.\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \quad (\mathbf{2.11})$$

حيث Q_j تعطى بالعلاقة:

$$Q_j = \sum_i \left(\vec{F_i}.\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \right) , \qquad (j = 1,2,\dots,n) \qquad (\mathbf{2.12})$$

وتسمى القوى المعممة.

ولحساب الحد الباقي أي $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{W_i}.\partial \vec{r_i}$ نكتب:

$$\vec{W_i}.\delta \vec{r_i} = \sum_j^n \frac{d\vec{v_i}}{dt}.\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v_i}.\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \right) - \left(\vec{v_i}.\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j \quad (\mathbf{2.13})$$

ومن السهل حساب الحد الأخير إذا علمنا أن $\vec{r_i}$ تخضع لاشتقاقين الأول بالنسبة لـــ q_j والثاني بالنسبة للزمن ويمكن، ضمن شروط المسألة، التبديل بين الاشتقاقين حيث نجد:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_j}\vec{r}_i = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\vec{r_i}}{dt} = \frac{\partial \vec{v_i}}{\partial q_j} \qquad (\mathbf{2.14})$$

وطبقاً لـــ (2.9) و (2.14) يكون:

$$\vec{W}_i.\delta\vec{r}_i=\sum_j\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i.\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)-\sum_j\vec{v}_i.\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}\partial q_j \qquad (\mathbf{2.15})$$

وبالضرب بـــ m_i ثم الجمع بـــ i من 1 حتى N (كل نقط المجموعة) نجد:

$$\sum_i m_i\,\vec{W}_i.\delta\vec{r}_i=\sum_j\left[\sum_i\frac{d}{dt}m_i\left(\vec{v}_i.\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_i}\right)-\sum_i m_i\left(\vec{v}_i.\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_i}\right)\right]\delta q_j \quad (\mathbf{2.16})$$

ويبدو بوضوح أن الحد الأول هو مشتق الطاقة الحركية الكلية بالنسبة للسرع المعممة $\dot{q}_j$. أما الثاني فهو مشتق هذه الطاقة بالنسبة للإحداثيات المعممة q_j أي أن:

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\,\vec{W}_i\,\delta\vec{r}_i=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j \qquad (\mathbf{2.17})$$

وعندئذٍ نجد من (2.11) و (2.17) و (2.2) أن:

$$\sum_i\left(\vec{F}_i-m_i\,\vec{W}_i\right)\delta\vec{r}_i=\sum_j Q_j\delta q_j-\sum_j\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j=0 \quad (\mathbf{2.18})$$

ومنه:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)\delta q_j=0 \qquad (\mathbf{2.19})$$

ولكي تتحقق هذه المعادلة مهما كانت δq_j ينبغي أن تنعدم أمثال δq_j لأن الانتقالات δq_j مستقلة بسبب طريقة اختيار هذه الإحداثيات المعممة q_j.

وعندئذٍ نجد من (2.19) معادلات لاغرانج من النوع الثاني التالية:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad (\mathbf{2.20})$$

وهي عبارة عن n معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية كافية لحساب n مجهولاً من q_j بدلالة الزمن وبالتالي ايجاد قوانين الحركة.

13- تابع لاغرانج:

يمكن أن تأخذ معادلات لاغرانج (2.20) شكلاً آخر قد يكون أسهل استعمالاً ، سنبحث عنه الآن.

نعبر عن القوة المؤثرة $\vec{F_i}$ في النقطة M_i بدلالة تابع الكمون V (وذلك بفرض أن القوى المؤثرة في المجموعة المادية هي قوى كمونية) طبقاً للعلاقة المعروفة $\vec{F_i} = -\text{grad}_i V$. وعندئذٍ نحسب عبارة القوى المعممة Q_j اعتماداً على تعريفها (2.12) فنجد:

$$Q_j = \sum_i \vec{F_i} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_i} = -\sum_i \text{grad}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} =$$

$$= -\sum \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \textbf{(2.21)}$$

وبالتبديل في (2.20) نجد المعادلة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

ومنه:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 \quad \textbf{(2.22)}$$

وإذا لاحظنا أن تابع الكمون يتعلق بموضع النقطة المادية أي بإحداثياتها q_j ولايتعلق بالسرع المعممة $\dot{q}_j$ فإن $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ وبالتالي فإن طرح المقدار $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}$ من الحد الأول في المعادلة السابقة لايغير من الأمر شيئاً وهكذا نضع المعادلة (2.22) بالشكل:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 \quad \textbf{(2.23)}$$

لنرمز بــ L للمقدار (T-V) الذي يسمى تابع لاغرانج وهو يساوي تفاضل الطاقتين الحركية والكامنة أي أن:

$$L = T - V \qquad (\mathbf{2.24})$$

ثم نبدل $T - V$ بقيمتها هذه في المعادلة (2.23) فنحصل على شكل آخر لمعادلات لاغرانج هو التالي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (\mathbf{2.25})$$

وهي عبارة عن n معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية كافية لحساب n احداثي معمم q_j بدلالة الزمن وبالتالي ايجاد قوانين الحركة.

تأخذ المعادلات (2.25) شكلاً آخر عندما تتأثر المجموعة بقوى غير كمونية حيث نجد تعميماً لها هو:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j' \qquad (\mathbf{2.25'})$$

حيث Q_j' هي القوى المعممة غير المشتقة من كمون، وهي التي تنتج عن ردود أفعال أو توترات خيوط أو قوى احتكاك أو قوى مقاومة الوسط وغيرها.

14- طريقة استخدام معادلات لاغرانج في حل المسائل:

أ- المعادلات: (2.20):

– نختار الاحداثيات المعممة بشكل مناسب، بحيث يكون عددها يساوي عدد درجات الحرية للجملة أي $3N - k$.

– نحسب الطاقة الحركية بدلالة الاحداثيات المعممة والسرع المعممة.

– نحسب القوى المعممة وذلك بحساب العمل الافتراضي فتكون أمثال الانتقالات الافتراضية للاحداثيات المعممة (أي أمثال δq_j) هي Q_j.

– نحسب مشتقات الطاقة الحركية بالنسبة إلى q_j و $\dot{q}_j$ ثم نشكل المعادلات (2.20).

ب- المعادلات: (2.25):

– نختار الإحداثيات المعممة كما في الحالة الأولى.

– نحسب تابع الكمون اعتماداً على تعريفه بدلالة الإحداثيات المعممة ثم نحسب الطاقة الحركية بدلالة q_j و $\dot{q}_j$.

– نحسب تابع لاغرانج $L = T - V$ ثم نحسب مشتقاته بالنسبة لــ q_j و $\dot{q}_j$.

– نشكل معادلات لاغرانج (2.25).

مثال:

يطلب الحصول على معادلات نيوتن لنقطة مادية طليقة انطلاقاً من تابع لاغرانج.

الحل:

نختار الإحداثيات المعممة $q_1 = x , q_2 = y , q_3 = z$ (مع العلم أن عددها يجب أن يكون ثلاثة لأن النقطة طليقة) ويكون: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

ثم نحسب العمل الافتراضي $\delta A = \vec{F}.\delta\vec{r} = F x.\delta x + F_y\ \delta y + Fz\ \ \delta z$ أي أن: $Q_x = F_x\ ,\ Q_y = F_y\ ,\ Q_z = F_z$. لنحسب المشتقات:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\ ,\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}\ ,\ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}\ ,\ \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

نشكل الآن معادلات لاغرانج من النوع (2.20) فنجد:

$$m\ddot{x} = F_x\ ,\ m\ddot{y} = F_y\ ,\ m\ddot{z} = F_z \Rightarrow m\vec{W} = \vec{F} \quad (\mathbf{2.26})$$

وهي معادلة نيوتن لنقطة مادية طليقة.

أما إذا استخدمنا المعادلة (2.25) فإننا نجد:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x, y, z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\ ,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}\ ,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial V}{\partial x}=F_x,\ \frac{\partial L}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial y}=F_y,\ \frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial V}{\partial z}=F_z$$

نشكل معادلات لاغرانج من النوع (2.25) فنجد المعادلات (2.26) نفسها.

15- التعبير عن الطاقة الحركية بدلالة q_j و $\dot{q}_j$ في الحالة العامة:

من المعلوم أن الطاقة الحركية لجملة مادية تعطى بالعلاقة:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v_i^2$$

لنحسب هذه الطاقة بعد تبديل $\vec{v}_i$ بقيمتها من (2.8) فنجد:

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left[\sum_j\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right]^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left[\sum_j\sum_k\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k+2\sum_j\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\dot{q}_j+\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2\right]$$

$$=T_2+T_1+T_0 \qquad (2.27)$$

حيث:

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{j,k}^{n}a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k,\quad\left(a_{jk}=a_{kj}=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) \qquad (2.28)$$

$$T_1=\sum_{j,k}^{n}b_j\dot{q}_j,\quad\left(b_j=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) \qquad (2.29)$$

$$T_0=\frac{1}{2}\sum_{i}^{N}m_i\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2 \qquad (2.30)$$

ويبدو بوضوح أن T_2 يحوي السرع المعممة من المرتبة الثانية و T_1 يحوي هذه السرع من المرتبة الأولى و T_0 يحوي السرع المعممة من المرتبة صفر أي أنه لايحوي السرع المعمة اطلاقاً.

وفي الحالة الخاصة عندما لاتحوي المعادلة (2.8) الزمن بشكل صريح يكون $\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t} = 0$ وبالتالي $T = T_2$ وعندئذٍ يعبر عن الطاقة الحركية الكلية للجملة المادية بتابع متجانس من الدرجة الثانية بالنسبة للسرع المعممة $\dot{q}_j$.

وطبقاً لنظرية أولر في التوابع المتجانسة يكون:

$$\sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 2T = 2T_2 \qquad (\mathbf{2.31})$$

ويمكن البرهان أن المعادلة (2.31) تكون صحيحة دوماً عندما لاتتعلق الارتباطات المطبقة على الجملة المادية بالزمن، أي عندما تكون هذه الارتباطات مستقرة.

16- ملاحظات على تابع لاغرانج:

1- عندما تنعدم القوى المعممة Q'_k غير المشتقة من كمون ولايحوي تابع لاغرانج أحد الإحداثيات المعممة وليكن q_k مثلاً فإن: $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ وعندئذٍ نحصل من معادلات لاغرانج (2.26) على العلاقة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{Const.} \qquad (\mathbf{2.32})$$

وهو تكامل للحركة.

وإذا لم يحو تابع لاغرانج عدداً S من الإحداثيات المعممة فإننا نحصل على S تكاملاً من هذا النوع.

نسمي الإحداثيات q_k في هذه الحالة إحداثيات دورية وسنعود إلى ذلك فيما بعد ونحصل على معادلات جديدة للحركة.

2- لنضرب طرفي المعادلة (2.25) بـــ $\dot{q}_j$ ثم نجمع بـــ j على أن يشمل الجمع كافةً الإحداثيات المعممة أي من 1 حتى n:

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j \qquad (2.33)$$

نضيف إلى الطرفين المقدار $\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$ فنجد:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] \qquad (2.34)$$

وإذا علمنا أن تابع لاغرانج يتبع، بصورة عامة، q_j و $\dot{q}_j$ و t أي $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$، ثم باشتقاق هذا التابع بالنسبة للزمن نجد:

$$\frac{dL}{dt} = \sum \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} \qquad (2.35)$$

ومنه نحسب الحد الثاني من (2.34)، فنجده مساوياً الفرق بين المشتقين الكلي والجزئي لتابع لاغرانج.

أما الطرف الأيسر فهو المشتق الكلي للمقدار $\left(\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right)$ وبالتعويض في (2.34) نحصل، بعد دمج المشتقين الكليين بالنسبة للزمن، على المعادلة التالية:

$$\frac{d}{dt} \left[\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (2.36)$$

وينعدم الطرف الثاني إذا لم يحو تابع لاغرانج الزمن بشكل صريح وعندئذٍ نحصل على تكامل جديد للحركة هو التالي:

$$\sum_{j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \text{Const.} \qquad (2.37)$$

وسنبرهن فيمايلي أن هذا التكامل هو تكامل الطاقة.

3- لنحسب الحد الأول في (2.37) فنلاحظ أولاً أن تابع الكمون V لايحوي السرع المعممة فهو يتبع الإحداثيات المعممة q_j لاغير وبالتالي يكون $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ وعندئذٍ نجد طبقاً لـــ (2.31):

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T - T + V = E \qquad (\mathbf{2.38})$$

وبالتدبيل في (2.36) نحصل على قانون مصونية الطاقة التالي:

$$E = E_0 \qquad (\mathbf{2.39})$$

ونريد التأكيد هنا أن تحقق القانون (2.39) يتطلب أن يكون $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ طبقاً لـــ (2.36)، ولما كان $L = T - V$ وكانت الطاقة الحركية تابعاً متجانساً من الدرجة الثانية بالنسبة للسرع المعممة (لأن $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$ وهذا بدوره يتحقق عندما تكون الارتباطات مستقرة كما ذكرنا آنفاً) ولايحوي الزمن بشكل صريح في هذه الحالة فإن:

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial (T-V)}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} \qquad (\mathbf{2.40})$$

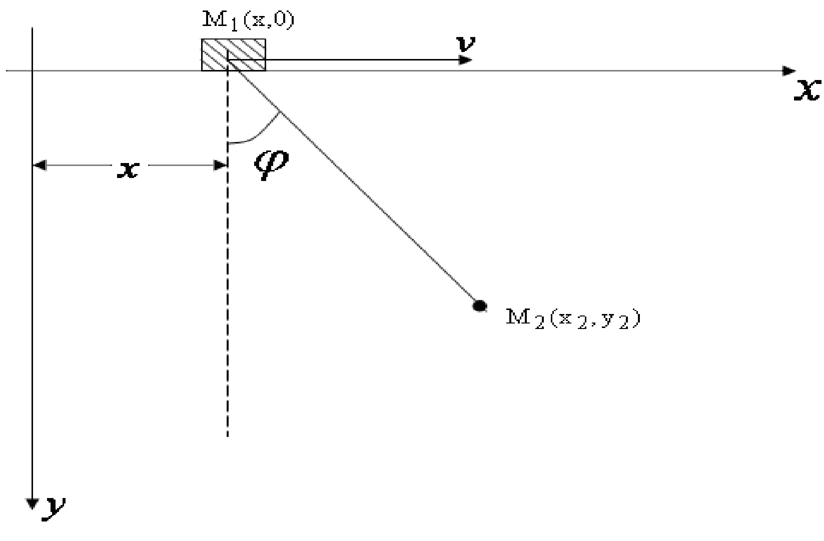
ومنه نستنتج أن الطاقة الكلية تكون ثابتة (تكامل للحركة) عندما لايتعلق الكمون بصورة صريحة بالزمن، وهي النتيجة المعروفة من ميكانيك نيوتن (راجع مواضيع الميكانيك الفيزيائي).

مسائل الفصل الثاني

1- نواس مستو كتلته m_2 ونقطة تعليقه ذات الكتلة m_1 تحرك بحركة ما على المحور الأفقي ox.

آ- احسب تابع لاغرانج للجملة.

ب- اكتب معادلات لاغرانج لهذه الجملة واحسب دور الاهتزازات الصغيرة لها.



الشكل **(2.1)**

الحل:

نلاحظ أولاً أن للجملة وسيطين مستقلين نختارهما كما يلي:

x: فاصلة النقطة M_1 على المحور ox.

φ: الزاوية التي يصنعها M_1M_2 مع الشاقول شكل (2.1).

ولحساب تابع لاغرانج نحسب كلاً من الطاقة الحركية وتابع الكمون ولابد أولاً من حساب سرعة M_2 ولهذا نحسب إحداثياتها فنجد:

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} \qquad (1)$$

ومنه:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x + \ell \sin\varphi \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{x} + \ell \cos\varphi.\dot{\varphi} \\ y_2 &= \ell \cos\varphi \Rightarrow \dot{y}_2 = -\ell \sin\varphi.\dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}^2 + \ell^{\bullet 2} \dot{\varphi}^2 + 2\ell\, \dot{x} \dot{\varphi} \cos\varphi \right)$$

$$(3)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 \qquad (4)$$

وكذلك نجد:

$$V = -\int \vec{F}.\vec{dr} = -mgy_2 = -m_2 g\ell \cos\varphi \qquad (5)$$

ويكون تابع لاغرانج:

$$L = T_1 + T_2 - V =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (1^2 \dot{\varphi}^2 + 2\,\ell \dot{x} \dot{\varphi} \cos\varphi) + m_2 g \ell \cos\varphi \qquad (6)$$

ب- للحصول على معادلات لاغرانج يجب الاشتقاق بالنسبة للسرع المعممة $\dot{\varphi}$ و $\dot{x}$ وللإحداثيات المعممة φ و x حيث نجد:

(7)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 \ell\ \dot{\varphi} \cos\varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 \ell^2 \dot{\varphi} + m_2 \ell \dot{x} \cos\varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 \ell \dot{x} \dot{\varphi} \sin\varphi - m_2 g \ell \sin\varphi \end{aligned}\right\}$$

ومنه نحصل على المعادلات المطلوبة التالية:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)x^{\bullet}+m_2\ell\varphi^{\bullet}\cos\varphi\right]=0\Rightarrow(m_1+m_2)x^{\bullet}+m_2\ell\varphi^{\bullet}\cos\varphi=0\\&\frac{d}{dt}\left[m_2\ell^2\varphi^{\bullet}+m_2\ell x^{\bullet}\cos\varphi\right]+m_2g\ell\sin\varphi+m_2\ell x^{\bullet}\varphi^{\bullet}\sin\varphi=0\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

مع العلم أننا اخترنا شروطاً ابتدائية مناسبة بحيث ينعدم ثابت التكامل في المعادلة الأولى من (8).

وللحصول على دور الاهتزازات الصغيرة نحسب $x^{\bullet}$ من الأولى حيث نجد:

$$x^{\bullet}=-\frac{m_2\ell\varphi^{\bullet}}{m_1+m_2}\cos\varphi \qquad (9)$$

ثم نعوضها في الثانية فنحصل بعد الاختصار على $m_2\ell^2$ على المعادلة:

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi^{\bullet}-\frac{m_2\varphi^{\bullet}\cos^2\varphi}{m_1+m_2}\right)+\frac{g}{\ell}\sin\varphi-\frac{m_2\varphi^{\bullet 2}}{m_1+m_2}\sin\varphi\cos\varphi=0 \qquad (10)$$

وباجراء الاشتقاق نجد:

$$\left(1-\frac{m_2\cos^2\varphi}{m_1+m_2}\right)\varphi^{\bullet\bullet}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\varphi^{\bullet 2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{g}{\ell}\sin\varphi=0 \qquad (11)$$

وعندما تكون الاهتزازات صغيرة $\varphi^{\bullet 2}\to 0, \cos\varphi\to 1, \sin\varphi\to\varphi$ نحصل أخيراً، كحالة خاصة من (11)، على المعادلة:

$$\frac{m_1}{m_1+m_2}\varphi^{\bullet\bullet}+\frac{g}{\ell}\varphi=0\Rightarrow\varphi^{\bullet\bullet}+\omega^2\varphi=0 \qquad (12)$$

وهي معادلة حركة توافقية اهتزازية دورها:

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m_1\ell}{(m_1+m_2)g}} \qquad (13)$$

2- اوجد المعادلات التفاضلية لحركة نقطة مادية تتحرك تحت تأثير قوى فعالة محصلتها F مع العلم أن الوسط الذي توجد فيه يدور بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور شاقولي ثابت oz.

الحل:

سنحل هذه المسألة باستخدام معادلات لاغرانج (2.20) فنأخذ محاور إحداثية ثابتة oxyz ومحاور أخرى OXYZ متماسكة مع الوسط المتحرك بحيث ينطبق المحور OZ على المحور الثابت oz، أما x و y فتحسب بدلالة X و Y طبقاً للعلاقات المعروفة ويكون:

$$x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi,\ y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi, z = Z, \varphi = \omega t \qquad (1)$$

ولكي نحسب الطاقة الحركية ينبغي حساب السرعة أولاً ولهذا نشتق العلاقات السابقة فنجد:

$$\dot{x} = \dot{X}\cos\varphi - \dot{Y}\sin\varphi - \dot{\varphi}X\sin\varphi - \dot{\varphi}\ Y\ \cos\varphi \qquad (2)$$

$$\dot{y} = \dot{X}\sin\varphi + \dot{Y}\cos\varphi + X\dot{\varphi}\cos\varphi - Y\dot{\varphi}\sin\varphi \qquad (3)$$

وبالتربيع نجد أخيراً:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \left(X^2 + Y^2\right)\dot{\varphi}^2 - 2(X\dot{Y} - Y\dot{X})\dot{\varphi}$$

وبالتالي فالطاقة الحركية T:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}m\Big[\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \left(X^2 + Y^2\right)\omega^2 +$$

$$+ 2(X\dot{Y} - Y\dot{X})\omega + \dot{Z}^2\Big]\ ,\ (\dot{\varphi} = \omega) \qquad (4)$$

ولحساب القوى المعممة نحسب العمل الافتراضي:

$$\delta W = \vec{F}.\delta\vec{r} = F_X\delta X + F_Y\delta Y + F_Z\delta Z \qquad (5)$$

أي أن:

$$Q_X = F_X,\ Q_Y = F_Y\ , Q_Z = F_Z \qquad (6)$$

أن مشتقات T بالنسبة للسرع المعممة والاحداثيات المعممة فهي:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{X}} = m\dot{X} - m\omega Y,\ \frac{\partial T}{\partial X} = m\omega^2 X + m\omega\dot{Y} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial Y^{\bullet}} = mY^{\bullet} + m\omega X, \quad \frac{\partial T}{\partial Y} = m\omega^2 Y - m\omega X^{\bullet} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial Z^{\bullet}} = mZ^{\bullet} \qquad , \quad \frac{\partial T}{\partial Z} = 0 \qquad (9)$$

وبالاعتماد على المعادلات (6) و (7) و (8) و (9) نحصل على معادلات الحركة التالية:

$$mX^{\bullet\bullet} = m\omega^2 X + 2m\omega Y' + F_X \qquad (10)$$

$$mY^{\bullet\bullet} = m\omega^2 Y - 2m\omega X^{\bullet} + F_Y \qquad (11)$$

$$mZ^{\bullet\bullet} = F_Z \qquad (12)$$

هذا ويمكن الوصول إلى النتيجة نفسها بطريقة ثانية انطلاقاً من معادلات الحركة النسبية وهي التالية (راجع مواضيع الميكانيك الفيزيائي):

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + \vec{J}_e + \vec{J}_c \qquad (13)$$

حيث:

$$\vec{J}_e = -m\vec{W}_e = -m\left[\vec{W}_0 + \left(\overset{\bullet}{\vec{\omega}} \times \vec{OM}\right) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM})\right]$$

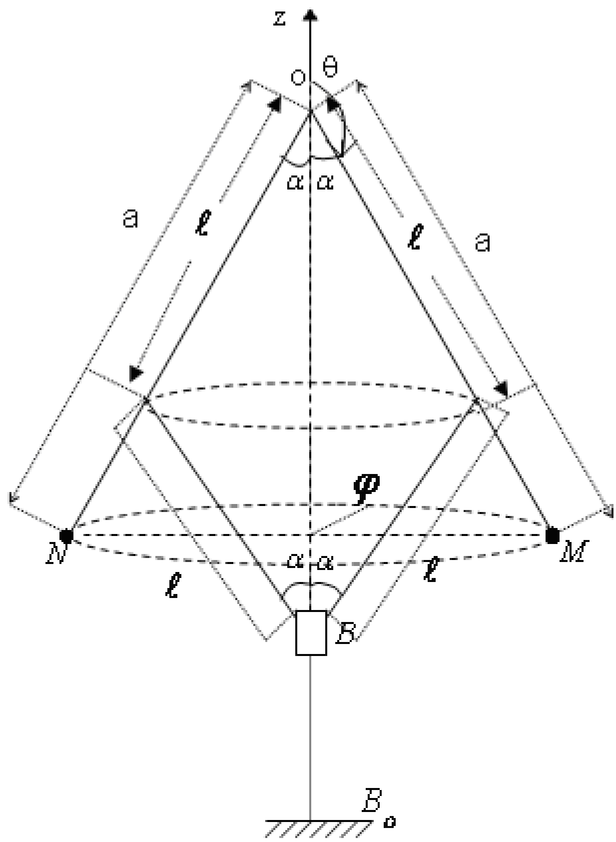
$$= -m\left[\vec{\omega}\left(\vec{\omega} \times \vec{OM}\right) - \omega^2 \vec{OM}\right] = +m\omega^2 \vec{OM} \qquad (14)$$

أما قوة العطالة الجرية $\vec{J}_C$ فتعطى بالمعين:

$$\vec{J}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ O & O & \omega \\ X^{\bullet} & Y^{\bullet} & Z^{\bullet} \end{vmatrix} \qquad (15)$$

وبتبديل $\vec{J}_e$ و $\vec{J}_c$ بقيمتيهما من (14) و (15) تم الاسقاط على محاور الثلاثية المتحركة المتماسكة مع الوسط OXYZ نحصل على المعادلات (10) و (11) و (12) نفسها.

3- يدور منظم تحت تأثير عزم $\vec{\mu}$، وزن كل من كرتي المنظم M، N يساوي P_1 وهما مثبتان في طرفي ذراعين OM و ON طول كل منهما a، أما الحلقة B ذات الوزن P_2 فيمكن أن تنزلق على محور شاقولي دون احتكاك وهي مربوطة بنابض ثبتت نهايته الثانية في نقطة B_0، وقد وصلت الحلقة B بذراعين آخرين BA و BD بحيث يتشكل معين OABD طول ضلعه ℓ شكل (2.2).



الشكل (2.2)

اوجد المعادلات التفاضلية لحركة المنظم علماً أن الكتلتين M و N تعتبران نقطيتين وأن عزم عطالة الحلقة B حول محورها يساوي I وأن كتلة الأذرعة مهملة.

الحل:

سنحل هذه المسألة انطلاقاً من المعادلات (2.20) لذا يجب أولاً اختيار الإحداثيات المعممة ثم حساب الطاقة الحركة والقوى المعممة.

نستخدم الإحداثيات الكروية فنعين النقطة M بثلاثة وسطاء (r,θ,φ) حيث $r = a$. ويسهل تعيين النقطة N بعد ذلك بإضافة π إلى الزاوية φ (انظر الشكل) وهكذا يكون $M(a,\theta,\varphi),\ N(a,\theta,\pi+\varphi)$ مع العلم أن $\theta = \pi - \alpha$.

وتكون الطاقة الحركية لها:

$$T = 2\frac{1}{2}m_1a^2\left(\theta^{\bullet 2} + \varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta\right) = m_1a^2\left(\theta^2 + \varphi^2\sin^2\theta\right) \quad (1)$$

ومن السهل حسب الطاقة الحركية للنقطة B حيث يبدو من الشكل أن:

$$OB = z(B) = 2\ell\cos\theta \quad (2)$$

ومنه نحصل على السرعة الانسحابية للحلقة B ذات الكتلة m_2:

$$v(B) = z^{\bullet}(B) = -2\ell\sin\theta\,\theta^{\bullet}$$

أما الطاقة الحركية لهذه الحلقة فتتألف من طاقتين: الأولى هي الانسحابية التالية:

$$T_t(B) = \frac{1}{2}mv^2(B) = \frac{1}{2}4m\ell^2\sin^2\theta\,\theta^{\bullet 2} = 2m\,\ell^2\theta^{\bullet 2}\sin^2\theta \quad (3)$$

والثانية هي الطاقة الحركية الدورانية حول المحور oz التي تساوي $\frac{1}{2}I\varphi^{\bullet 2}$ أي أن:

$$T(B) = T_t(B) + T_{rot}(B) = 2m\,\ell^2\theta^{\bullet 2}\sin^2\theta + \frac{1}{2}I\varphi^{\bullet 2} \quad (4)$$

أما الطاقة الحركية لكل المنظم فتساوي:

$$T = m_1a^2\left(\theta^{\bullet 2} + \varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta\right) + 2m_2\ell^2\theta^{\bullet 2}\sin^2\theta + \frac{1}{2}I\varphi^{\bullet 2} = \quad (5)$$

$$= \left(m_1a^2 + 2m_2\ell^2\sin^2\theta\right)\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}\left(I + 2m_1a^2\sin^2\theta\right)\varphi^{\bullet 2}$$

لنحسب الآن القوى المعممة فنلاحظ أن القوى المؤثرة هي أثقال الكتل M و N و B وقوة شد النابض بالاضافة إلى العزم μ الذي يدور المنظم، أن عمل الأثقال عندما يحدث انتقال عنصري فهو:

$$\delta A_1 = \vec{P_1}.\delta\vec{M} + \vec{P_1}.\delta\vec{N} + \vec{P_2}.\delta\vec{B} = 2P_{1z}\delta z(M) + P_{2z}\delta z(B) =$$
$$= -2P_1\delta z(N) - P_2\delta z(B) \qquad (6)$$

حيث:

$$z(M) = a\cos\theta \quad , \quad z(B) = 2\ell c\mathrm{Cos}\theta$$
$$\delta z(M) = -a\sin\theta\delta\theta \ , \quad \delta z(B) = -2\ell\sin\theta\delta\theta \qquad (7)$$

وبالتعويض في (6) نجد:

$$\delta A_1 = 2P_1 a\sin\theta\delta\theta + 2P_2\ell s\mathrm{Sin}\theta\delta\theta = 2(P_1 a + P_2\ell)\sin\theta\delta\theta \qquad (8)$$

ولحساب العمل الافتراضي الناتج عن شد النابض يجب حساب استطالته لذا نفرض أن الأذرعة كانت منطبقة على oz عندما كان النابض z في وضع الراحة، وبتأثير العزم $\vec{\mu}$ تبدأ الأذرعة بالابتعاد عن oz ويبدو من الشكل ان استطالة النابض Δ تساوي:

$$\Delta = z(B_0) - z(B)$$

حيث $z(B_0)$ هو راقم النقطة B عندما كانت الأذرعة منطبقة على oz وهو يساوي -2ℓ و $z(B)$ هو راقم النقطة B الحالي أثناء الدوران وهو يساوي $2\ell\cos\theta$ أي أن:

$$\Delta = -2\ell - 2\ell\cos\theta = -2\ell(1+\cos\theta) \qquad (9)$$

أما القوة F الناتجة عن هذه الاستطالة فهي:

$$|F| = C\Delta = 2C\ell(1+\cos\theta) \qquad (10)$$

أما العمل العنصري الافتراضي الناتج عن هذه القوة فهو:

$$\delta A_2 = \vec{F}.\delta\vec{r} = F_z\delta z(B) = -2C\ell(1+\cos\theta)(-2\ell\sin\theta\delta\theta)$$
$$= 4C\ell^2(1+\cos\theta)\sin\theta.\delta\theta \qquad (11)$$

وأخيراً نجد أن العمل العنصري الناتج عن العزم يساوي:

$$\delta A_3 = \mu\,\delta\varphi \qquad (12)$$

ويكون العمل الافتراضي العنصري الكلي: الناتج عن الأثقال والنابض والعزم:

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 + \delta A_3 = 2\left[P_1 a + P_2 \ell + 2C\,\ell^2(1+\cos\theta)\right]\sin\theta\,\delta\theta + \mu\,\delta\varphi$$

أي أن:

$$Q_\theta = 2\left[P_1 a + P_2 \ell + 2C\,\ell^2(1+\cos\theta)\right]\sin\theta \qquad (13)$$

$$Q_\varphi = \mu \qquad (14)$$

وللحصول على معادلات لاغرانج المطلوبة نشتق الطاقة الحركية (5) فنجد:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta^\bullet} = 2\left(m_1 a^2 + 2m_2 \ell^2 \sin^2\theta\right)\theta^\bullet,\ \frac{\partial T}{\partial \varphi^\bullet} = 2\left(I + 2m_1 a^2 \sin^2\theta\right)\varphi^\bullet \qquad (15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = m_1 a^2 \theta^{\bullet 2}\sin 2\theta + 2m_2 \ell^2 \theta^{\bullet 2}\sin 2\theta,\quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \qquad (16)$$

ومن (13) و (14) و (15) و (16) نحصل على معادلات الحركة التالية:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(2m_1 a^2 + 2m_2 \ell^2 \sin^2\theta\right)\theta^\bullet\right] - m_1 a^2 \varphi^{\bullet 2}\sin 2\theta - 2m_2 \ell^2 \theta^{\bullet 2}\sin 2\theta =$$

$$= 2\left[P_1 a + P_2 \ell + 2C\,\ell^2(1+\cos\theta)\right]\sin\theta \qquad (17)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left(I + 2m_1 a^2 \sin^2\theta\right)\varphi'\right] = \mu \qquad (18)$$

4- يطلب الحصول على معادلات حركة نقطة مادية طليقة في الإحداثيات الاسطوانية والكروية انطلاقاً من المعادلات (2.20) والمعادلات (2.25).

5- يوضع نواس مشحون بشحنة q في حقل كهربائي $\vec{\varepsilon}$ متجانس يتجه نحو الأعلى فإذا علمت أن ثقل النواس هو $m\vec{g}$ فاحسب تابع لاغرانج له ثم أوجد قانون حركته. ناقش حسب القيم المختلفة لكل من $\vec{\varepsilon}$ و $\vec{g}$.

6- يتحرك جسيم في حقل الثقالة الأرضية على السطح الداخلي لمخروط قائم زاويته α ومحوره oz ورأسه في مبدأ الإحداثيات وقاعدته أعلى من رأسه. اكتب معادلات الحركة.

7- أعد نفس السؤال عندما تتم الحركة على نصف كرة نصف قطرها a (النواس الكروي).

8- اوجد قانون حركة نقطة مادية إذا أعطي تابع لاغرانج بكل من العلاقتين التاليتين:

$$a)\ L(x,\dot{x}) = e^{-x^2-\dot{x}^2} + 2\dot{x}e^{-x^2}\int_0^{\dot{x}} e^{-y^2}dy$$

$$b)\ L(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}e^{\alpha t}\left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right)$$

9- جسيم يتحرك في الكمون: $V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$

آ- هل يمكن مباشرة كتابة تكامل أولي للحركة؟ ولماذا؟

ب- أوجد قانون الحركة بالطريقة العامة.

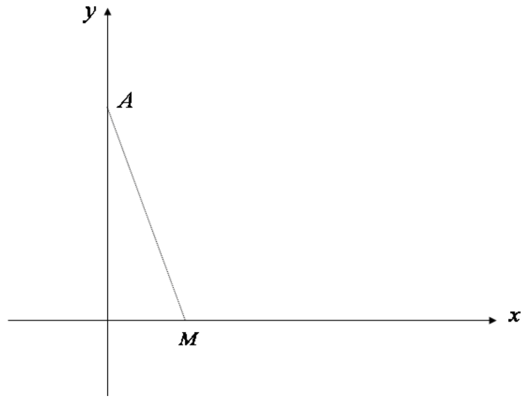
ج- استخدم تابع لاغرانج لايجاد قانون الحركة وقارن مع نتائج الطلب الثاني.

10- أوجد قانون حركة جسيم إذا أعطي تابع لاغرانج له بالعلاقة:

$$L(x,\dot{x},y,\dot{y}) = \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2} - \frac{\omega_1^2 x^2 + \omega_0^2 y^2}{2}$$

11- برهن أنه عندما يتحرك جسيم في كمون ناتج عن مستوٍ لامتناهي في الاتساع فإن المركبة L_z والمركبتين P_x , P_y تبقيان مصانتين.

12- احسب تواتر الاهتزازات الصغيرة لنقطة مادية كتلتها m تتحرك على مستقيم وهي مشدودة بنابض قساوته k من النقطة A بقوة $\vec{F}$ (شكل 2.3).
أعد السؤال نفسه عندما تتحرك النقطة على دائرة نصف قطرها معلوم.



شكل (**2.3**)

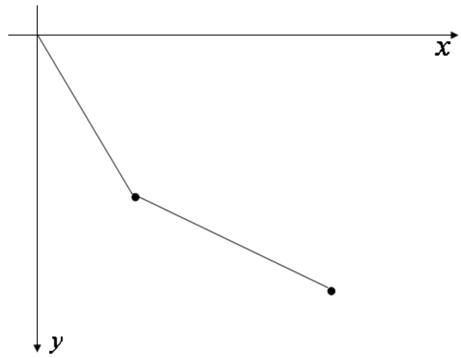
13- أوجد قانون حركة جسيم يجبر على الاهتزاز تحت تأثير قوة المرونة $-kx$ وقوة أخرى دورية في كل من الحالات التالية:

b) $F = at$ a) $F = F_0 = Const.$

c) $F = F_0 e^{-\theta t}$ d) $F = F_0 e^{-\alpha t} \cos\beta t$

(توجيه: استخدام المعادلات (2.20) واحسب القوى المعممة في كل حالة).

14- احسب تابع لاغرانج للنواس المستوى الثنائي الموضح على الشكل (2.4).



شكل (2.4)

15– احسب تابع لاغرانج لنواس مستو في الحالات الثلاث التالية:

آ– تتحرك نقطة تعليقة بحركة جيبية على المحور الشاقولي oy.

ب– تتحرك نقطة تعليقة بحركة جيبية على المحور الأفقي oz.

ج– تتحرك نقطة تعليقة بسرعة خطية ثابتة على دائرة نصف قطرها a بسرعة زاوية ω.

16– أوجد المعادلة التفاضلية لحركة جسم صلب يدور حول محور ثابت تحت تأثير عزم $\vec{M}$ باستخدام (2.20) و (2.25).

17– يتحرك جسيم على منحن شاقولي معادلتاه الوسيطتان:

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s)$$

حيث s هو طول قوس المنحني.

آ– اكتب معادلات لاغرانج لهذا الجسيم.

ب– إذا كانت معادلة المنحني من الشكل (سيكلوئيد):

$$x = a(s - \sin s) \ , \quad y = a(1 - \cos s)$$

فاكتب معادلات لاغرانج في هذه الحالة.

18- تتحرك نقطة تعليق نواس، طوله ℓ وكتلته m على مستوٍ مائل على الأفق بزاوية α. اختر الإحداثيات المعممة واستخدم المعادلات (2.20) لكتابة معادلات حركة هذا النواس.

19- يتحرك جسيم تحت تأثير قوة وحيدة تمر من نقطة ثابتة O وتعطى بالعلاقة:

$$\vec{F} = -mk^2\,\vec{OM} = -mk^2\,\vec{r}$$

آ- برهن أن هذا الجسيم يتحرك في مستو يطلب تعيينه.

ب- أوجد المسار وقانون الحركة بطريقتين تختارهما.

20- تتحرك نقطة مادية على مستو معادلته:

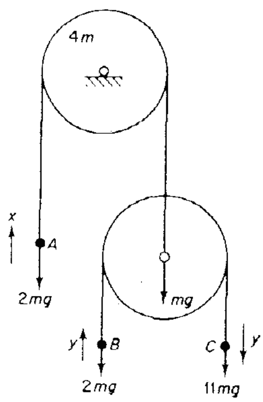
$$2x + 3y + z - 1 = 0$$

آ- ماعدد وسطاء المسألة؟ اختر هذه الوسطاء بالشكل الذي تراه مناسباً.

ب- اكتب معادلات لاغرانج لهذه النقطة مع العلم أنها تتحرك تحت تأثير قوة وحيدة فعالة هي ثقلها وأن ارتباطها بالمستوى مثالي.

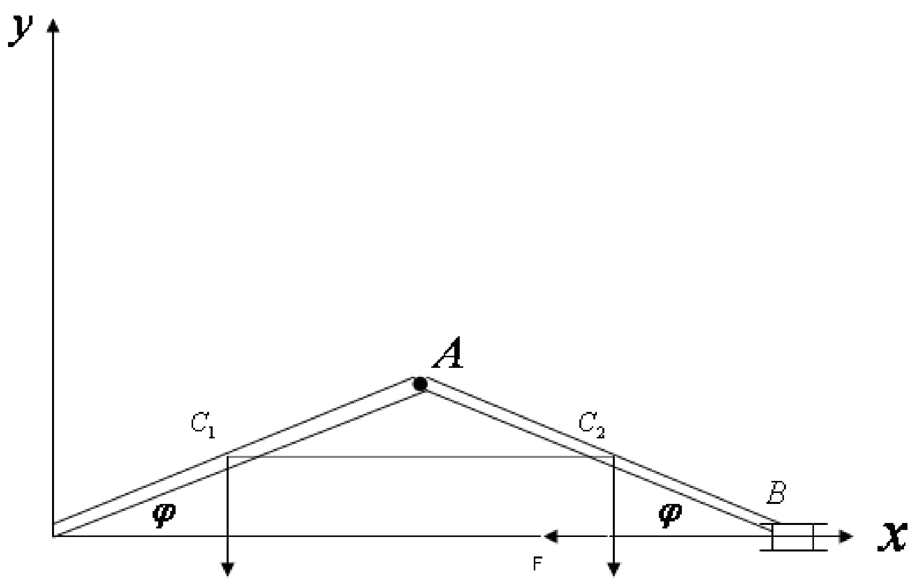
21- اكتب معادلات الحركة في الحقل المركزي انطلاقاً من معادلات لاغرانج.

22- خيط خفيف علقت في طرفه كتلة 2m يمر على بكرة كتلتها 4m يمكنها الدوران حول محور أفقي ويتصل طرف الخيط الثاني ببكرة ثانية كتلتها m يمكنها الدوران حول محور أفقي أيضاً، كما يمكنها التحرك في مستو شاقولي وقد علق عليها خيط آخر ينتهي من طرفيه بكتلتين هما 2m و 11m على الترتيب شكل (2.5). اكتب معادلات الحركة.



الشكل **(2.5)**

23– أوجد أوضاع توازن المجموعة المادية الموضحة على الشكل المجاور ثم احسب القوى المعممة الشكل (2.6).



الشكل (**2.6**)

24– احسب دور الاهتزازات الصغيرة للعارضة المرسوم على الشكل (1.5) من الفصل السابق.

الفصل الثالث

معادلات هاملتون، أقواس بواصون، معادلة هاملتون – جاكوبي

17- معادلات هاملتون (المعادلات القانونية):

تلعب معادلات هاملتون دوراً هاماً في حل مسائل الميكانيك لايقل عن دور معادلات لاغرانج التي رأيناها. فمن المعلوم أن معادلات لاغرانج التي يحققها تابع لاغرانج L لمجموعة مادية محافظة هي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (j=1,2,....,n) \quad \mathbf{(3.1)}$$

وهي مجموعة معادلات تفاضلية من المرتبة الثانية عددها n، حيث q_j , $\dot{q}_j$ هي الإحداثيات المعممة والسرع المعممة على الترتيب.

يبدو أنه من الممكن الحصول على معادلات جديدة عددها 2n بإدخال متحول جديد p_j بدلاً من $\dot{q}_j$ يسمى الاندفاع المعمم، طبقاً للعلاقة:

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad \mathbf{(3.2)}$$

ثم الانتقال من الإحداثيات q_j, $\dot{q}_j$ إلى الإحداثيات p_j , q_j اعتماداً على المعادلات (3.2) التي عددها n ، ونمهد ذلك رياضياً بمايلي:

لتكن الدالة $f(x,y)$. إن تفاضل f هو:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=u.dx+v.dy$$

فإذا أخذنا دالة جديدة g طبقاً للعلاقة:

$$g=f-ux$$

ثم فاضلناها:

$$dg = df - udx - xdu = udx + vdy - udx - xdu$$

ومنه:

$$dg = vdy - xdu \quad \textbf{(3.3)}$$

حيث:

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u} \;,\; v = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \textbf{(3.4)}$$

وهكذا نكون قد عبرنا عن g بدلالة المتحولين الجديدين v و x.

ولزيادة الايضاح نذكر مثالاً من الفيزياء الحرارية عندما يعبر عن الانتالبية X بدلالة الانتروبية S والضغط p بالعلاقة:

$$dX = TdS + Vdp$$

حيث:

$$T = \frac{\partial X}{\partial S} \;,\; V = \frac{\partial X}{\partial p}$$

غير أنه قد يكون من المناسب استخدام دالة أخرى هي الطاقة الحرة G (دالة جيبس) طبقاً للعلاقة:

$$G = X - TS$$

وبالتالي:

$$dG = -SdT + Vdp$$

أي أن:

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T} \;,\; V = \frac{\partial G}{\partial p} \quad \textbf{(3.5)}$$

للحصول على معادلات هاملتون نستفيد من التحويل السابق، فنعرف دالة هاملتون (تابع هاملتون) بالعلاقة:

$$H(p_j, q_i, t) = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L(q_i, \dot{q}_j, t)$$

$$\textbf{(3.6)} = \sum p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

على أن نبدل كل السرع المعممة $\dot{q}_j$ بدلالة الاندفاعات المعممة p_j والإحداثيات المعممة q_j.

وذلك بالاستفادة من مجموعة المعادلات (3.2) التي عددها n معادلة، ثم نفاضل H فنجد:

$$dH = \sum p_j dq_j^{\bullet} + \sum_j q_j^{\bullet} dp_j - \sum \frac{\partial L}{\partial q_j^{\bullet}} dq_j^{\bullet} - \sum \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} \quad \textbf{(3.7)}$$

وطبقاً لـــ (3.2) ينعدم الحدان الأول والثالث ومنه:

$$dH = \sum q_j^{\bullet} dp_j - \sum \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} \quad \textbf{(3.8)}$$

ونحصل من جهة ثانية بمفاضلة H، باعتبارها تابعاً لما يسمى المتحولات القانونية (أو الديناميكية) p_j و q_i على العلاقة:

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial P_j} dp_j + \sum \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad \textbf{(3.9)}$$

فإذا بدلنا $\frac{\partial L}{\partial q_j}$ الموجودة في (3.8) بقيمتها من معادلات لاغرانج (2.25) التي ينتج منها أن $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_j} = p_j^{\bullet}$ وقارنا (3.8) مع (3.9) نحصل على معادلات هاملتون (أو المعادلات القانونية التالية Canonic Equations):

$$q_j^{\bullet} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad -p_j^{\bullet} = \frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (j = 1,2,\ldots,n) \qquad \textbf{(3.10)}$$

بالاضافة إلى المعادلة المتممة:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \qquad \textbf{(3.11)}$$

إن عدد معادلات لاغرانج هو n معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية بينما عدد معادلات هاملتون هو 2n معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى وبالتالي فإن الانتقال من المجموعة الأولى (اللاغرانجية) إلى الثانية (الهاملتونية) يشبه تحويل معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية $f(y'', y', x)$ إلى معادلتي من المرتبة الأولى هما: $y' = z \ , \ f(z', z, x)$

18- كيف نستفيد من المعادلات (3.10) في حل مسائل الميكانيك؟

1- لابد أولاً من حساب تابع لاغرانج للجملة المدروسة ولهذا كما نعلم من الفصل السابق، يجب اختيار الإحداثيات المعممة بشكل مناسب، وبعد ذلك تشكيل تابع هاملتون طبقاً للمعادلة (3.6) ومن ثم وضعه بشكله النظامي بدلالة المتحولات القانونية q_j, p_j.

2- حساب المشتقات الجزئية $\frac{\partial H}{\partial q_j}, \frac{\partial H}{\partial p_j}$ وتشكيل المعادلات (3.10).

3- حل المعادلات الناتجة وايجاد قانون الحركة.

مثال:

اكتب معادلات هاملتون لجسيم طليق (غير خاضع لأي ارتباطات) يتحرك في كمون (جهد) من الشكل $V(r,\theta,\varphi)$.

الحل:

إن تابع لاغرانج لهذا الجسيم هو:

$$\textbf{(3.12)}\quad L = T.V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\mathrm{Sin}^2\theta\dot{\varphi}^2) - V(r,\theta,\varphi)$$

أما تابع (دالة) هاملتون له فهو:

$$H = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} =$$

$$\textbf{(3.13)} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\mathrm{Sin}^2\theta\dot{\varphi}^2) + V(r,\theta,\varphi) = T + V$$

لايمكن الاستفادة من H، بهذه الصيغة، لحل المسائل ولابد من تحويله إلى شكله النظامي بدلالة p_j, q_j ولهذا نستفيد من العلاقات التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial r^{\bullet}} = mr^{\bullet} = p_r \Rightarrow r^{\bullet} = \frac{p_r}{m}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta^{\bullet}} = mr^2\theta^{\bullet} = p_\theta \Rightarrow \theta^{\bullet} = \frac{p_\theta}{mr^2} \qquad \textbf{(3.14)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi^{\bullet}} = mr^2 \sin\,\theta\varphi^{\bullet} = p_\varphi \Rightarrow \varphi^{\bullet} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2\theta}$$

نبدل (3.14) في (3.13) فنحصل على تابع هاملتون بشكله النظامي التالي:

$$\textbf{(3.15)}\, H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \mathrm{Sin}^2\theta}\right) + V(r, \theta, \varphi)$$

ويسهل الآن تشكيل معادلات هاملتون (3.10) حيث نجد المجموعة الأولى التالية:

$$\textbf{(3.16)} \quad \left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = r^{\bullet} \Rightarrow p_r = mr^{\bullet} \\
&\frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_r}{mr^2} = \theta^{\bullet} \Rightarrow p_\theta = mr^2\theta^{\bullet} \\
&\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2\theta} = \varphi^{\bullet} \Rightarrow p_\varphi = mr^2 \sin^2\theta\varphi^{\bullet}
\end{aligned}\right\}$$

أما المجموعة الثانية فهي:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial r}=-\overset{\bullet}{p}_r \Rightarrow -\frac{1}{mr^3}\left(p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)+\frac{\partial V}{\partial r}=-\overset{\bullet}{p}_r\\
\textbf{(3.17)}\ &\frac{\partial H}{\partial \theta}=-\overset{\bullet}{p}_\theta \Rightarrow -\frac{p_\varphi^2\cos\theta}{mr^2\sin^2\theta}+\frac{\partial V}{\partial \theta}=0\\
&\frac{\partial H}{\partial \varphi}=-\overset{\bullet}{p}_\varphi \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \varphi}=-\overset{\bullet}{p}_\varphi
\end{aligned}\right\}$$

من الواضح أن مجموعتي المعادلات التفاضلية الست (3.16) و (3.17) هي معادلات حركة أي جسيم في كمون $V(r,\theta,\varphi)$ مهما كان شكل هذا الكمون. أما عدد معادلات لاغرانج المقابلة فهي ثلاث فقط من المرتبة الثانية. في الحالة الخاصة عندما يتحرك الجسيم في حقل قوى كموني ذي تناظر مركزي، حيث يعبر عن الكمون بـــ $V(r)$ وليس بـــ $V(\vec{r})$، ويكون $\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0\,,\,\frac{\partial V}{\partial \theta}=0$ نحصل عندئذٍ مباشرةً على تكامل للحركة من المعادلة الأخيرة من المجموعة الثانية حيث نجد:

$$\textbf{(3.18)}\, p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\overset{\bullet}{\varphi} = \text{Const.}$$

ويمكن الحصول على النتيجة نفسها من معادلات لاغرانج:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \varphi'}=\text{Const.}$$

قد يكون من المفيد الإشارة إلى أن هذه المسألة بالذات تصبح أكثر تناظراً عندما نستخدم الإحداثيات الديكارتية (x,y,z) بدلاً من الكروية وعندئذٍ نضع تابع لاغرانج بالصيغة:

$$\textbf{(3.19)}\ \ L=\frac{1}{2}m(\overset{\bullet}{x}^2+\overset{\bullet}{y}^2+\overset{\bullet}{z}^2)-V(x,y,z)$$

أما تابع هاملتون فهو:

$$\textbf{(3.20)}\ \ H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+V(x,y,z)$$

وتصبح معادلات هاملتون:

$$\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{p_x}{m}=\dot{x}\Rightarrow p_x=m\dot{x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_y}=\frac{p_y}{m}=\dot{y}\Rightarrow p_y=m\dot{y} \qquad \textbf{(3.21)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_z}=\frac{p_z}{m}=\dot{z}\Rightarrow p_z=m\dot{z}$$

وكذلك:

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial x}=-\dot{p}_x\Rightarrow \dot{p}_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=F_x=m\ddot{x}$$

$$\textbf{(3.22)}\ \frac{\partial H}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial y}=-\dot{p}_y\Rightarrow \dot{p}_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=F_y=m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z}=\frac{\partial V}{\partial z}=-\dot{p}_z\Rightarrow \dot{p}_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=F_z=m\ddot{z}$$

ومن الواضح أن هذه المعادلات الأخيرة هي معادلات نيوتن نفسها لهذه الحركة.

19- خواص تابع هاملتون:

أ- لنأخذ معادلات لاغرانج (2.25) في حالة انعدام القوى غير المشتقة من كمون $(Q_j^{'}=0)$ونضرب طرفي المعادلة بـــ $\dot{q}_j$ ثم نجمع بـــ j فنجد:

$$\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j.\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j \quad \textbf{(3.23)}$$

نضيف إلى الطرفين المقدار $\sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$ فنجد:

$$\textbf{(3.24)}\ \sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

ومنه:

$$\frac{d}{dt}\sum_j\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right]=\frac{dL}{dt}-\frac{\partial L}{\partial t}$$

أو:

$$\textbf{(3.25)}\quad \frac{d}{dt}\left(\sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L\right)=\frac{dH}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial t}$$

أي أن مشتق تابع هاملتون الكلي بالنسبة للزمن يساوي مشتق تابع الكمون الجزئي بالنسبة للزمن أيضاً.

ب- يسمى تابع هاملتون، أحياناً، تابع الطاقة E فهو يساوي E عندما لاتتعلق الارتباطات بالزمن حيث يكون $T=T_2$ (راجع الفصل الثاني) وبالتالي يكون:

$$\textbf{(3.26)}\quad \sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=\sum\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=2T$$

وعندئذٍ نجد:

$$H=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=2T-(T-V)=T+V=E\quad \textbf{(3.27)}$$

ولكن H لايكون تكاملاً للحركة إلا عندما لايتعلق الكمون بصورة صريحة بالزمن طبقاً لــ (3.25).

ج- تختلف أبعاد p_j الموجود في تابع هاملتون باختلاف الإحداثيات المعممة التي نختارها؛ فإذا أخذنا q_j بحيث يكون لها أبعاد طول (x,y,z مثلاً) فإن أبعاد $\dot{q}_j$ المقابلة ستكون LT^{-1} أما أبعاد p_j فتكون MLT^{-1} وهي أبعاد كمية حركة (اندفاع). أما إذا أخذنا q_j دون أبعاد (زاوية مثلاً) فإن أبعاد $\dot{q}_j$ ستكون T^{-1} وأبعاد p_j هي ML^2T^{-1} وفي جميع الحالات يجب أن تكون أبعاد $p_j\dot{q}_j$ أبعاد طاقة أي ML^2T^{-2}.

20- الإحداثيات الدورية – تابع راوث، معادلات راوث:

Cyclic Coordinates, Routh Function, Routh Equations:

ليكن تابع لاغرانج لجسيم $M(r,\theta)$ يتحرك في حقل مركزي متناظر:

$$\textbf{(3.28)}\ L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

وهو لايحوي الاحداثي المعمم θ وبالتالي يمكن أن نكتب مباشرةً تكاملاً للحركة اعتماداً على معادلات لاغرانج هو التالي:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} = \text{Const.}\ \textbf{(3.29)}$$

ويمكن تبديل $\dot{\theta}$ بقيمتها في تابع لاغرانج فنحصل على معادلة لاتحوي θ ولا $\dot{\theta}$ وبالتالي يكون لدينا معادلة واحدة للحركة تتعلق بالاحداثيي r، وهكذا ينخفض عدد معادلات لاغرانج.

نعمم ذلك فنفرض أن تابع لاغرانج لجملة مادية لايحوي عدداً s من الإحداثيات المعممة التي عددها $n\ (s<n)$ وعندئذٍ نحصل على S تكاملاً للحركة هي:

$$\textbf{(3.30)}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = C_j \qquad (j = 1,2,...,s)$$

فإذا عوضنا s من السرع المعممة المحسوبة من (3.30) بدلالة $(n-s)$ من السرع المعممة الباقية فإننا نحصل على تابع لاغرانج لايحوي $(n-s)$ من السرع المعممة ومثلها من الإحداثيات المعممة ولكنه يحوي s ثابتاً C_j طبقاً لـــ (3.30) وهكذا نجد التابع التالي:

$$\textbf{(3.31)} \qquad L = L(q_{s+1}, q_{s+2},..., q_n\ , \dot{q}_{s+1}, \dot{q}_{s+2}, \dot{q}_n, C_1, C_2,..., C_s)$$

وعندئذٍ تشكل التابع التالي المسمى تابع راوث:

$$R(q_{s+1},..., q_n,\ \dot{q}_{s+1},..., q_n, C_1,..., C_s) = L - \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = L - \sum_{j=1}^{S} C_j \dot{q}_j$$

(3.32)

ثم نفاضل الطرفين بالنسبة إلى $C_j, \dot{q}_j, q_j$ فنجد:

$$\delta R=\sum_{j=S+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial q_j}\delta q_j+\sum_{j=S+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j+\sum_{j}^{S}\frac{\partial R}{\partial C_j}\delta C_j=$$

$$=\sum_{j=S+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j+\sum_{j=1}^{S}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j+\sum_{j=S+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j-\sum_{j}^{S}\delta C_j\dot{q}_j-\sum_{j=1}^{S}C_j\delta \dot{q}_j \quad \textbf{(3.33)}$$

نلاحظ أن الحدين الثاني والأخير من الطرف الثاني متساويان وعندئذٍ نحصل بالمقارنة بين أمثال $\delta\dot{q}_j, \delta q_j, \delta C_j$ في الطرفين على المعادلات التالية:

$$\frac{\partial R}{\partial q_j}=\frac{\partial L}{\partial q_j}\ ,\ \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ ,\ \frac{\partial R}{\partial C_j}=-\dot{q}_j \qquad \textbf{(3.34)}$$

وبالتعويض في معادلات لاغرانج (3.1) نحصل على معادلات راوث التالية:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial R}{\partial q_j}=0 \quad (j=1,2,\ldots,n-s) \qquad \textbf{(3.35)}$$

وهي عبارة عن $(n-s)$ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية كافية لحساب $(n-s)$ مجهولاً من q_j (قوانين الحركة)؛ أي أن عدد هذه المعادلات ينقص s معادلة عن معادلات لاغرانج مما يجعلها أسهل استخداماً.

ولإيجاد قوانين الحركة الخاصة بالإحداثيات المعممة غير الموجودة في تابع لاغرانج والتي تسمى الإحداثيات الدورية نحصل من (3.34) مباشرةً باستكمالها على قوانين الحركة الباقية المطلوبة:

$$q_j=-\int\frac{\partial R}{\partial C_j}dt \qquad (j=1,2,\ldots,s) \qquad \textbf{(3.36)}$$

وهي عبارة عن s معادلة كافية لحساب s من الإحداثيات المعممة الباقية بدلالة الزمن.

نلاحظ أن معادلات راوث تشبه معادلات لاغرانج تماماً، ولكن هل يمتد هذا التشابه ليشمل العلاقات التي يحققها كل من الدالتين؟

لنضرب طرفي المعادلات (3.35) بـــ $\dot{q}_j$ ثم نجمع بـــ j فنجد:

$$\sum_{j=s+1}^{n}\dot{q}_j\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{j=s+1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial R}{\partial q_j} \qquad \textbf{(3.37)}$$

ثم نضيف إلى الطرفين المقدار $\sum_{j=s+1}^{n} \ddot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}$ كما فعلنا عند الحصول على المعادلة (3.25) فنجد:

$$\sum_{j=s+1}^{n} \dot{q}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{j=s+1}^{n} \ddot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=s+1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial q_j} + \sum_{j=s+1}^{n} \ddot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \quad \textbf{(3.38)}$$

ومنه:

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = \frac{dR}{dt} - \frac{\partial R}{\partial t}$$

أو:

$$\textbf{(3.39)} \qquad \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - R\right] = -\frac{\partial R}{\partial t}$$

وفي الحالة الخاصة عندما لايحوي تابع راوث الزمن بشكل صريح نحصل مباشرةً من (3.39) على تكامل حركة يمكن استخدامه في حل المسائل هو التالي:

$$\textbf{(3.40)} \qquad \sum_{j=s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - R = \text{Const.}$$

21- أقواس بواصون: Poisson Brackets

ليس من الصعب كتابة معادلات الحركة بطرق مختلفة، ولكن لابد للحصول على قانون الحركة من حل هذه المعادلات وحساب الإحداثيات q_j مباشرةً بدلالة الزمن وثوابت الحركة. وقد رأينا سابقاً أنه يمكن الاستفادة من بعض التكاملات الأولية كتكامل الطاقة وتكامل العزم الحركي. ومن المفيد شرح طريقة لايجاد بعض هذه التكاملات مباشرةً هي طريقة بواصون.

لتكن دالة المتحولات القانونية والزمن $f(p_j, q_i, t)$ ولنحسب المشتق الزمني الكلي لها:

$$\textbf{(3.41)} \qquad \frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial P_j}\dot{p}_j + \frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

وبالاستفادة من معادلات هاملتون (3.10) يمكن وضع العلاقة السابقة بالشكل:

$$\frac{df}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=[H,f]+\frac{\partial f}{\partial t} \qquad \textbf{(3.42)}$$

حيث رمزنا بـــ $[H,f]$ للمقدار:

$$[H,f]=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}\right) \qquad \textbf{(3.43)}$$

الذي يسمى أقواس بواصون.

إذا لم تحوِ الدالة f الزمن بشكل صريح $\left(\frac{\partial f}{\partial t}=0\right)$ فإننا نجد من (3.43) العلاقة:

$$\frac{df}{dt}=[H,f] \qquad \textbf{(3.44)}$$

وبالتالي يتساوى المشتق الكلي للدالة f مع أقواس بواصون المقابلة وأن انعدام هذه الأقواس يعني، بكل بساطة، أن f هو بالضبط تكامل الحركة، وعندئذٍ نصل إلى النتيجة التالية:

تكون دالة ما $f(p_j,q_j)$ تكاملاً للحركة إذا انعدمت أقواس بواصون المشكلة منها ومن دالة هاملتون $([H,f]=0)$.

لنأخذ بعض الأمثلة:

1- من المعلوم أن اندفاع نقطة مادية طليقة يكون ثابتاً (تكاملاً للحركة) إذا انعدمت القوى المؤثرة عليها. فهل يمكن الوصول إلى النتيجة نفسها عن طريق أقواس بواصون؟

للإجابة عن هذا السؤال نحسب أقواس بواصون $\left[H,\vec{p}\right]$ فنجد:

$$\left[H,\vec{p}\right]=\left[H,p_x\vec{i}\right]+\left[H,p_y\vec{j}\right]+\left[H,p_z\vec{k}\right] \qquad \textbf{(3.45)}$$

وبالحساب نجد:

$$[H,p_x]=\sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_x}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial p_x}{\partial p_j}\right)=-\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{\partial V}{\partial x}=F_x$$

أي أن:

$$\left[H,\vec{p}\right]=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}=\vec{F}$$

فإذا انعدمت القوة $\vec{F}$ يكون $[H,p]=0$ وبالتالي $\vec{p}=Const.$ وهي النتيجة المعروفة سابقاً.

ب- وبالطريقة نفسها نبرهن أن العزم الحركي $\vec{L}$ هو تكامل للحركة عندما يتحرك الجسيم في حقل مركزي متناظر وذلك بحساب [H,L] التالية:

$$\left[H,\vec{L}\right]=\left[H,L_x\vec{i}\right]+\left[H,L_y\vec{j}\right]+\left[H,L_z\vec{k}\right] \qquad \textbf{(3.46)}$$

حيث نجد:

$$[H,L_x]=\sum_j\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial L_x}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial L_x}{\partial p_j}\right) \quad (j=1,2,3\Leftrightarrow x,y,z)$$

فإذا استفدنا من الصيغ المعروفة لمركبات العزم الحركي نجد أخيراً:

$$[H,L_x]=\frac{\partial V}{\partial y}z-\frac{\partial V}{\partial z}y=-(rx\nabla V)_x=(rxF)_x=M_x$$

وكذلك نجد:

$$[H,L_z]=M_z\,,\ [H,L_y]=M_y$$

أي أن:

$$\left[H,\vec{L}\right]=\vec{M} \qquad \textbf{(3.47)}$$

حيث $\vec{M}$ هو عزم القوة المؤثرة على الجسيم، وينعدم هذا العزم عندما تكون القوة مركزية، وفي هذه الحالة تنعدم أقواس بواصون $\left[H,\vec{L}\right]$ وبالتالي

فالعزم الحركي يكون ثابتاً (تكاملاً للحركة)، وهي نتيجة معروفة سابقاً من ميكانيك نيوتن.

يبدو أنه من الممكن وضع المعادلات القانونية بصيغة أخرى على ضوء أقواس بواصون، ولهذا نحسب $[H,p_k]$ و $[H,q_k]$ فنجد:

$$[H,p_k]=\sum_j\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_k}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial p_k}{\partial p_j}\right)\Bigg\}=\sum_j \dot{p}_j\delta_{kj}=\dot{p}_k$$

(3.48)

$$[H,q_k]=\sum_j\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial q_k}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_k}{\partial p_j}\right)\Bigg\}=\sum_j \dot{q}_j\delta_{kj}=\dot{q}_k$$

وهي الصيغة المطلوبة.

نعمم تعريف أقواس بواصون (3.43) على أي دالتين f_1 و f_2 للمتحولات القانونية p_j و q_j بالعلاقة:

$$[f_1,f_2]=\sum_j\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_j}\frac{\partial f_2}{\partial q_j}-\frac{\partial f_1}{\partial q_j}\frac{\partial f_2}{\partial p_j}\right) \qquad \textbf{(3.49)}$$

ومن السهل التأكد مباشرةً ممايلي:

1- أقواس بواصون لاتبادلية:

$$[f_1,f_2]=-[f_2,f_1]\neq[f_1,f_2] \qquad \textbf{(3.50)}$$

2- تحقق خاصة الجمع:

$$[f_1+f_2,f_3]=[f_1,f_3]+[f_2,f_3] \qquad \textbf{(3.51)}$$

3- تحقق الخاصة التالية:

$$[f_1f_2,f_3]=f_1[f_2,f_3]+f_2[f_1,f_3] \qquad \textbf{(3.52)}$$

4- تحقق مطابقة جاكوبي التالية:

$$[f_1,[f_2,f_3]]+[f_2,[f_3,f_1]]+[f_3,[f_1,f_2]]=0 \qquad \textbf{(3.53)}$$

5- نحسب مشتق أقواس بواصون بالنسبة للزمن بالعلاقة:

$$\frac{d}{dt}[f_1,f_2]=\left[\frac{df_1}{dt},f_2\right]+\left[f_1,\frac{df_2}{dt}\right] \qquad \textbf{(3.54)}$$

من المفيد، قبل أن ننهي هذه الفقرة تعميم التعريف (3.43) ليشمل ميكانيك الكم، حيث نستبدل المقادير الفيزيائية f بمؤثرات نرمز لها $\hat{f}$ ليس لها معنى فيزيائياً إلا إذا أثرت على ما بعدها. وفي هذه الحالة نعرف أقواس بواصون في ميكانيك الكم بالعلاقة:

$$[f_1, f_2]_{qu} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{f}_1, \hat{f}_2\right] = \frac{i}{\hbar}\left(\hat{f}_1\hat{f}_2 - \hat{f}_2\hat{f}_1\right) \qquad \textbf{(3.55)}$$

يسمى المقدار $\left[\hat{f}_1, \hat{f}_2\right]$ مبدل المؤثرين. ضمن هذا الاطار تكتب معادلة هاينزبرغ في ميكانيك الكم التي تقابل تماماً معادلات الحركة في الميكانيك التقليدي بالصيغة التالية:

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{p}\right], \quad \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{x}\right] \qquad \textbf{(3.56a)}$$

حيث $\hat{H}$، $\hat{p}$ و $\hat{x}$ هي مؤثرات هاملتون والاندفاع والاحداثي x على الترتيب، مع العلم أنه يمكن كتابة معادلة حركة أي مؤثر بالطريقة نفسها حيث نجد:

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{L}\right] = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}\hat{L} - \hat{L}\hat{H}\right] \qquad \textbf{(3.56b)}$$

ونقول، كما في الميكانيك التقليدي، أن المقدار الفيزيائي المقابل للمؤثر $\hat{L}$ يكون مصاناً (تكاملاً للحركة) إذا انعدمت أقواس بواصون الكوانتية الموافقة له.

22- معادلة هاملتون جاكوبي: Hamilton – Jakobi Equation

سنرى الآن في هذه الفقرة معادلة حركة جديدة تضاف إلى المعادلات التي رأيناها سابقاً في الميكانيك التحليلي. لذلك ندرس جملة مادية محافظة (يتحقق فيها قانون مصونية الطاقة) مؤلفة من N نقطة إحداثياتها $x_i, y_i, z_i \ (i = 1, \ldots, N)$ وبالتالي فهي موصوفة بـــ 3N إحداثي. لنشكل فضاءً اقليدياً أبعاده $3N+1 \ (E_{3N+1})$ مؤلفاً من إحداثيات النقط السابقة والزمن. إن

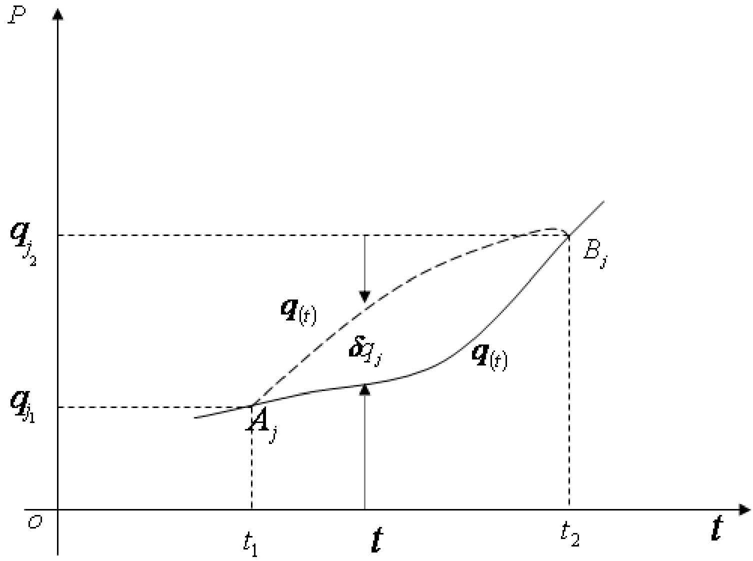
وضع الجملة ككل في اللحظة t يتعين بنقطة واحدة $M(x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N, t)$ في هذا الفضاء، أما وضع الجملة في لحظة أخرى t' فيتعين بالنقطة $M'(x'_1, y'_1, z'_1, ..., x'_N, y'_N, z'_N, t')$ وترسم النقطة M بين اللحظتين t و t' مساراً MM' تمثل كل نقطة منه وضعاً ميكانيكياً للجملة.

لنشكل الآن فضاء آخر E_{n+1} مؤلفاً من الإحداثيات المعممة q_j $(j = 1, 2, ..., n)$ والزمن t. إن وضع الجملة في اللحظة t في هذا الفضاء يتعين بنقطة واحدة $m(q_1, q_2, ..., q_n, t)$ تقابل النقطة M في الفضاء E_{3N+1} أما وضع الجملة في اللحظة t فيتعين بنقطة ثانية m' في الفضاء E_{n+1} مقابلة للنقطة M'في الفضاء E_{3N+1}، وعندما تتحرك M في الفضاء E_{3N+1} تتحرك m في الفضاء E_{n+1} بحيث ترسم مساراً mm'، مقابلاً للمسار MM'، تقابل كل نقطة فيه وضعاً ميكانيكياً للجملة في الفضاء E_{n+1}.

نعرف الآن تابع الفعل S (Action Function) بالعلاقة:

$$S = \int L(q_j, \dot{q}_j, t)dt \qquad \textbf{(3.57)}$$

ولتكن النقطة A_j الممثلة لوضع المجموعة المادية في اللحظة t_1 في الفضاء E_{n+1}. يمكن انطلاقاً من النقطة A_j رسم مجموعة لانهائية من المسارات الافتراضية (رسمت في بعدين فقط) شكل (3.1) ولكن واحداً منها فقط (الخط المتصل على الشكل) يمثل الحركة الحقيقية التي تحدث فعلاً تحت تأثير القوى المطبقة على الجملة المدروسة.



الشكل (**3.1**)

نفاضل الآن التابع S بين اللحظتين t_1 ولحظة أخرى اختيارية t فنجد:

$$\delta S=\sum_{j=1}^{n}\int_{t_1}^{t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j\right)dt \qquad \textbf{(3.58)}$$

فإذا علمنا أن:

$$\delta \dot{q}_j=\delta\frac{d}{dt}q_j=\frac{d}{dt}\delta q_j \qquad \textbf{(3.59)}$$

فيمكن وضع الحد الثاني في (3.58) بالصيغة:

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{t_1}^{t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\delta q_j=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Big|_{t_1}^{t}-\sum\int_{t_1}^{t}\delta q_j\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}dt \qquad \textbf{(3.60)}$$

وبالتبديل في (3.58) نجد (بعد ملاحظة انعدام الحد الأول من الطرف الثاني في (3.60) عندما $t=t_1$ لأن كل المسارات تبدأ من A في اللحظة t_1) وبالتالي $\delta q_j=0$ عندما $t=t_1$ مايلي:

$$\delta S=\sum_{j=1}^{n}\int_{t_1}^{t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j.dt+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j \qquad \textbf{(3.61)}$$

وبما أن الجملة المادية المدروسة هي جملة محافظة وبالتالي تحقق معادلات لاغرانج (3.1) فيمكن كتابة (3.61) كمايلي:

$$\delta S = \sum_j p_j \delta q_j \qquad \textbf{(3.62)}$$

ومنه نستنتج المشتق الجزئي لتابع الفعل S بالنسبة للإحداثيات المعممة:

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = P_j \Rightarrow \vec{P} = \text{grad } S \qquad \textbf{(3.63)}$$

أما المشتق الكلي فهو معروف من تعريف تابع الفعل (3.57) S:

$$\frac{dS}{dt} = L \qquad \textbf{(3.64)}$$

ومن جهة ثانية نحصل بحساب المشتق الكلي لتابع الفعل باعتباره تابعاً للإحداثيات المعممة التي تتبع بدورها الزمن:

$$\frac{dS}{dt} = \sum \frac{\partial S}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum p_j \dot{q}_j + \frac{\partial S}{\partial t} \qquad \textbf{(3.65)}$$

وطبقاً لتعريف تابع هاملتون والعلاقة (3.64) نضع (3.65) بالشكل:

$$L - \sum p_j \dot{q}_j = +\frac{\partial S}{\partial t}$$

ومنه نحصل على <u>معادلة هاملتون – جاكوبي</u> التالية:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \qquad \textbf{(3.66)}$$

وللحصول على معادلة هاملتون – جاكوبي النظامية يجب تبديل p_j الموجودة في تابع هاملتون بقيمتها بدلالة المشتق الجزئي لتابع الفعل S بالنسبة للإحداثيات المعممة (3.63)، وهكذا نحصل على المعادلة:

$$\frac{\partial S}{\delta t} + H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n \; ; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) = 0 \qquad \textbf{(3.67)}$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية لاخطية لأنها تحوي $p_j^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2$ الناتجة عن تابع هاملتون.

يمكن من المعادلتين (3.65) استنتاج تعريف آخر لتابع الفعل S حيث نجد منهما بعد تبديل $\frac{\partial S}{\partial t}$ بقيمتها من (3.66)، أن:

$$\frac{dS}{dt} = -H + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{dq_j}{dt} \qquad \textbf{(3.68)}$$

ومنه نجد بعد ضرب الطرفين بـــ dt والاستكمال، تعريفاً آخر لـــ S بالعلاقة التالية:

$$S = \int \sum_j p_j dq_j - \int H dt \qquad \textbf{(3.69)}$$

مثال:

اكتب معادلة هاملتون – جاكوبي لجسيم يتحرك بتأثير قوة تشتق من كمون $V(x, y, z, t)$.

الحل:

من الضروري أولاً حساب دالة هاملتون:

$$H = T + V = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z, t)$$
$$= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z, t)$$

ولابد لكتابة المعادلة المطلوبة من تبديل P_j بقيمتها بدلالة المشتقات الجزئية لتابع الفعل اعتماداً على (3.63) حيث نجد:

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\partial S}{\partial z}$$

وعندئذٍ نضع المعادلة المطلوبة بالصيغة التالية:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + V(x, y, z, t) = 0$$

وإذا استخدمنا الإحداثيات الكروية نحصل على المعادلة:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \mathrm{Sin}^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] + V(r, \theta, \varphi, t) = 0$$

وأخيراً إذا استخدمنا الإحداثيات الاسطوانية:

$$\frac{\partial S}{\delta t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^{2}+\frac{1}{\rho^{2}}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^{2}+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^{2}\right]+H(\rho,\varphi,z,t)=0$$

23- كيف نستفيد من معادلة هاملتون – جاكوبي في حل مسائل الميكانيك؟

تعتبر مسألة ميكانيكية ما منتهية عندما نحصل على قانون حركتها، ويتم ذلك بحل المعادلات التفاضلية لهذه الحركة.

وسنرى فيمايلي أن معادلة هاملتون–جاكوبي وثيقة الصلة بالمعادلات القانونية (3.10) التي رأيناها سابقاً، وأن نظرية جاكوبي تنص على أن حل الأولى يكافيء تماماً حل الثانية. ولكن قبل أن نفصل في هذا الموضوع سنعطي فكرة عامة عن حل المعادلات التفاضلية الجزئية من النوع (3.67).

إن لكل من المعادلات المذكورة، بصورة عامة، نوعين من الحلول؛ يسمى الأول حلاً عاماً ويكون تابعاً اختيارياً للمتحولات المستقلة أما الثاني فيسمى حلاً تاماً (تكاملاً تاماً) يتبع المتحولات المستقلة وثوابت المسألة. غير أننا في الميكانيك لانهتم بالحل الأول.

تحوي المعادلة (3.67) على $n+1$ متحولاً هي الإحداثيات q_j والزمن t وبالتالي سنجد عند استكمالها $n+1$ ثابتاً. وبما أن S يدخل في المعادلة المذكورة بشكل مشتق فيمكن التأكيد أنه إذا وجد حل من النوع $S(q_1,q_2,...,q_n,t)$ فلابد أن يوجد حل آخر هو $S+C$، ولكن الثابت C لايلعب دوراً هاماً في الميكانيك، شأنه شأن الثابت في تابع الجهد، ولذلك نهمله. وهكذا نضع الحل التام للمعادلة (3.67) كمايلي:

$$S=S(q_1,q_2,...,q_n\;,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,t) \quad \textbf{(3.70)}$$

حيث:

α_j: ثوابت التكامل التي عددها n.

لنبحث الآن عن حل المعادلات القانونية (3.10) اعتماداً على ماسبق ولهذا نحسب المشتقات الجزئية بالنسبة للثوابت α_j من (3.70) ونساويها بثابت آخر β_j طبقاً للمعادلات:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j \ (j = 1, 2, ..., n) \quad \textbf{(3.71)}$$

وهي عبارة عن n معادلة جبرية يمكن أن نحسب منها كل المتحولات q_j بدلالة الثوابت والزمن (قوانين الحركة):

$$q_j = q_j(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \ \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, t) \quad \textbf{(3.72)}$$

وللحصول على الاندفاعات المعممة p_j نستفيد من (3.63) فنجد أن الطرف الأيسر يتبع الإحداثيات المعممة q_j والثوابت α_j. فإذا بدلنا q_j بقيمتها من (3.72) نحصل أخيراً على p_j التالية:

$$p_j = p_j(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \ \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, t) \quad \textbf{(3.73)}$$

وهنا نتساءل: ماهي العلاقة بين الحلول (3.72) و (3.73) وحلول المعادلات القانونية (3.10)؟ لقد أكدنا في بداية الفقرة الارتباط الوثيق بينهما. إن جواب السؤال السابق يكمن في نص نظرية جاكوبي التالي: إن المعادلات (3.72) و (3.73) هي بالفعل تكاملات المعادلات القانونية (3.10). ولبرهان ذلك نحسب المشتق الكلي بالنسبة للزمن للمعادلات (3.71) مع العلم أن S تتبع q_j التي تتبع بدورها الزمن وهكذا نجد:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k} \dot{q}_k = 0 \quad \textbf{(3.74)}$$

ومن جهة ثانية إذا بدلنا S بقيمتها من (3.70) في (3.67) ثم اشتقينا المعادلة الناتجة بالنسبة لـــ α_j فإننا نحصل على المعادلات:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j} + \sum_{k} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \quad \textbf{(3.75)}$$

تتطابق مجموعتي المعادلات (3,75) ، (3.74) وبالتالي نجد بالمقارنة بينهما أن:

$$\overset{\bullet}{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (k = 1, 2, ..., n) \quad \textbf{(3.76a)}$$

هكذا نحصل من جديد على المجموعة الأولى من معادلات هاملتون.

وللحصول على المجموعة الثانية نحسب المشتق الكلي بالنسبة للزمن من المعادلة (3.63) فنجد:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_j.\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_k} \overset{\bullet}{q}_k = \overset{\bullet}{p}_j \quad \textbf{(3.77)}$$

ومن جهة ثانية نجد باشتقاق المعادلة العامة (3.67) جزئياً بالنسبة إلى q_j (مع العلم أن q_j موجودة ضمن p_j التي تساوي $\frac{\partial S}{\partial q_j}$ وهي بدورها تابع صريح لــ q_j) مايلي:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_j} + \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$$

ومنه:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_j} + \sum_{k=1}^{n} \overset{\bullet}{q}_k \frac{\partial p_k}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad \textbf{(3.78)}$$

وبمقارنة(3.77) مع (3.78) نحصل على المجموعة الثانية من معادلات هاملتون التالية:

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\overset{\bullet}{p}_k \quad \textbf{(3.76b)}$$

والجدير بالذكر أن عكس نظرية جاكوبي صحيح بمعنى أنه يمكن الحصول على التكامل (3.70) من المعادلات القانونية (3.10).

نلخص ماسبق فنقول: يتم حل مسائل الميكانيك طبقاً لنظرية هاملتون-جاكوبي بالطريقة التالية:

بعد أن نختار المتحولات القانونية p_j و q_j اللازمة لوصف الجملة المحافظة، تشكل تابع هاملتون لها ونبدل فيه الاندفاعات المعممة p_j بالمشتقات الجزئية لتابع الفعل S بالنسبة لـ q_j فنحصل بالنتيجة على معادلات هاملتون – جاكوبي التي نبحث عن حلها (تكاملها) من النوع (3.70) ثم نشتق هذا الحل بالنسبة للثوابت α_j ونساوي هذه المشتقات بثوابت جديدة β_j فنحصل على مجموعة معادلات جديدة، عددها n، بالنسبة إلى q_j، بحلها نجد q_j مباشرةً بدلالة الزمن والثوابت α_j و β_j (قوانين الحركة) ولكننا حصلنا عليها في هذه المرة اعتماداً على معادلة هاملتون – جاكوبي.

24- طريقة اينشتين للحصول على معادلة هاملتون – جاكوبي:

قبل أن ننتقل إلى الفقرات الأخيرة في هذا الفصل من المفيد شرح طريقة أخرى منسوبة إلى انيشتين لاستنتاج معادلة هاملتون– جاكوبي وهي التالية:

فرض اينشتين أن الحركة تحدث في فضاء اقليدي E_n ذي n بعداً عناصره هي الإحداثيات المعممة q_j بحيث تتحقق معادلات هاملتون (3.10) دوماً وأن الاندفاعات المعممة p_j هي توابع لـ q_j وتابع هاملتون H وتشكل حقلاً عناصره p_j معرفاً في كل الفضاء E_n. فإذا حسبنا المشتق الكلي لـ p_j بدلالة الزمن نجد:

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial p_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_j}{\partial t} \quad \textbf{(3.79)}$$

وعندئذٍ نضع معادلة هاملتون الثانية بالشكل:

$$\frac{\partial P_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \qquad \textbf{(3.80)}$$

فإذا فرضنا الآن أن حقل الاندفاعات $\vec{p}$ يشتق من كمون $S(q_1, q_2, ..., q_n)$ بحيث يكون $\vec{p} = \nabla S$ وبالتالي $\text{rot } p = 0$ ومنه:

$$\frac{\partial p_j}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \ , \ p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} \qquad \textbf{(3.81)}$$

وبالتعويض في (3.80) نجد بعد تبديل $\frac{dq}{dt}$ بقيمتها من معادلات هاملتون:

$$\frac{\partial p_j}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_i}+\frac{\partial H}{\partial q_j}=0$$

نلاحظ أن الحد الأول هو $\frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial q_j \partial t}$ وأن الحدين الباقيين هما المشتق الجزئي لدالة هاملتون بالنسبة إلى q_j وبالتالي يمكن وضع العلاقة السابقة كمايلي:

أو:

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\frac{\partial S}{\partial t}+H\right]=0$$

ومنه:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H=0 \quad \mathbf{(3.82)}$$

وهي معادلة هاملتون – جاكوبي.

يمكن أيضاً الحصول على المعادلة (3.71) باشتقاق (3.82) جزئياً بالنسبة لـــ α_j (بعد ايجاد التكامل التام لها) حيث نجد:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j}+\sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j}=\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j}=$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial}{\partial q_i}\right]\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_j}\right)=0 \quad \mathbf{(3.83)}$$

فإذا لاحظنا أن مابين المعترضتين هو مؤثر المشتق الكلي بالنسبة للزمن، نتأكد أنه لكي تتحقق العلاقة السابقة يجب أن يكون:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j}=\beta_j$$

وهي المعادلة (3.71) بالضبط.

25- معادلة هاملتون – جاكوبي في الميكانيك الموجي والعلاقة بين الميكانيك الموجي والميكانيك التقليدي:

لنكتب هذه المعادلة أولاً للجمل المادية التي يتحقق فيها قانون مصونية الطاقة ولهذا نأخذ تابع فعل مصغر (تابع فعل لاغرانج) يعرف بالعلاقة:

$$S = S(t) = \int L dt = \int (T - V) dt = \int (2T - E) dt = W - Et$$

حيث W هو مايسمى تابع فعل لاغرانج أو تابع الفعل الأصغر وهو لايتعلق بالزمن بصورة صريحة ولبرهان ذلك نلاحظ أن:

$$dW = 2T dt = m\dot{x}\dot{x}dt + m\dot{y}\dot{y}dt + m\dot{z}\dot{z}dt = p_x dx + p_y dy + p_z dz \quad \textbf{(3.85)}$$

ومن جهة ثانية، إذا فاضلنا W باعتباره تابعاً للإحداثيات والزمن نجد:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz + \frac{\partial W}{\partial t}dt \qquad \textbf{(3.86)}$$

وبمقارنة (3.85) مع (3.86) نستنتج أن $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ وبالتالي لايحوي التابع W الزمن بشكل صريح، ويمكن عندئذٍ من المعادلة (3.85) الحصول على العلاقة:

$$\vec{p} = \text{grad } W = \nabla W \qquad \textbf{(3.87)}$$

وعندئذٍ إذا بدلنا p بقيمتها في المعادلة $T + V - E = 0$ نجد العلاقة:

$$\frac{1}{2m}(\text{grad } W)^2 + V - E = 0 \qquad \textbf{(3.88)}$$

(هذا مع العلم أن $\text{grad } S = \text{grad } W$ لأن E ثابتة). ويمكن الحصول على صيغة أخرى لمعادلة هاملتون – جاكوبي إذا لاحظنا من (3.84) أن $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$ وبالتالي نضع (3.88) كمايلي:

$$\frac{1}{2m}(\text{grad } S(t))^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad \textbf{(3.89)}$$

وهي الصيغة المطلوبة.

في الحالة الخاصة عندما يكون الجسيم حراً ($p = Const.$, $V = 0$, $E = Const.$).

يأخذ تابع الفعل S الصيغة التالية:

$$S(t) = W - Et = \int (p_x dx + p_y dy + p_z dz) - Et = \vec{p} . \vec{r} - Et \quad \textbf{(3.90)}$$

وسنبحث الآن، على ضوء ماتقدم، عن المعادلة التي يحققها تابع الفعل S في الميكانيك الموجي ولهذا ننطلق من المعادلة الموجية المستقرة، التي يحققها التابع الموجي والتي تصف جسيماً حراً وهي التالية:

$$\nabla^2\Psi + k^2\Psi = 0 \qquad \textbf{(3.91)}$$

مع العلم أن ∇^2 هو مؤثر لابلاس و $\vec{k}$ هو المتجه الموجي المرتبط مع طاقة الجسيم واندفاعه بالعلاقتين:

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \ , \ E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

حيث $\hbar$ ثابت بلانك مقسوماً على 2π ($\hbar = 1,05 \times 10^{-34}$ J.Sec).

إن حل المعادلة (3.91) هو التالي:

$$\Psi(\vec{r}) = Ae^{\frac{1}{\hbar}(\vec{p}.\vec{r})} = Ae^{i(\vec{k}.\vec{r})} \qquad \textbf{(3.92a)}$$

أما عندما نأخذ المعادلة الموجبة غير المستقرة بدلاً من (3.91) فيجب دمج القسم الزمني بالقسم الاحداثي وبالتالي نضع (3.92a):

$$\Psi(\vec{r},t) = Ae^{\frac{1}{\hbar}(\vec{p}.\vec{r} - ET)} \qquad \textbf{(3.92b)}$$

نعبر عن الأس بدلالة تابع الفعل (3.90) S حيث نجد:

$$\Psi(\vec{r},t) = Ae^{\frac{1}{\hbar}S(t)} \qquad \textbf{(3.92c)}$$

ويمكن الآن الحصول على صيغة لمعادلة هاملتون–جاكوبي في الميكانيك الموجي إذا اعتمدنا على معادلة شرودينغر التي تأخذ الخواص الجسيمية والموجية بعين الاعتبار، وهي التالية:

$$(H-E)\Psi=\left(\frac{p^2}{2m}+V-E\right)\Psi=0 \qquad \textbf{(3.93)}$$

وسنفرض الآن أن الدالة الموجية (3.92c) تحقق هذه المعادلة، ونحسب حدودها حداً حداً بعد العلم أن p تعتبر مؤثراً في ميكانيك الكم يعبر عنه بالصيغة: $\hat{p}=-i\hbar\nabla$ ويكون:

$$\hat{P}^2\Psi=\hat{p}\hat{p}\Psi=\hat{p}(-i\hbar\nabla\Psi)=\hat{p}\left(-i\hbar\left(\vec{i}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right)$$

وبالحساب نجد أخيراً:

$$p^2\Psi=-\hbar^2\nabla^2\Psi=-i\hbar.\nabla^2 S+(\text{grad } S)^2\Psi$$

وبالتعويض في (3.93) وحذف Ψ من الطرفين نحصل على معادلة هاملتون–جاكوبي، في الميكانيك الموجي، التالية:

$$\frac{1}{2m}(\text{grad } S)^2+V-E-i\hbar\frac{\nabla^2 S}{2m}=0 \qquad \textbf{(3.94)}$$

تعتبر المعادلة (3.94) صيغة ثانية لمعادلة شرودينغر المعروفة في ميكانيك الكم، وإذا حذفنا الحد الأخير نجد معادلة هاملتون – جاكوبي نفسها وبالتالي فالمعادلة (3.94) هي تعميم للمعادلة المذكورة. والسؤال الآن: متى يمكن حذف الحد الأخير وماهو المعنى الفيزيائي لهذا الحذف؟

نلاحظ مباشرةً من (3.94) أنه يمكن إهمال الحد الأخير الحاوي على التأثيرات الموجية (بسبب وجود $\hbar$ فيه) عندما تتحقق العلاقة:

$$(\text{grad } S)^2 >> \hbar/\nabla^2 S/ \qquad \textbf{(3.95)}$$

يسمى هذا التقريب، الذي يسمح بإهمال الحدود التي تحوي $\hbar$ في أية معادلة موجية، التقريب شبه الكلاسيكي، وعندئذٍ نحصل على المعادلة الكلاسيكية المقابلة. وبعارة أخرى يمكن اعتبار الميكانيك التقليدي حالة خاصة من الميكانيك الموجي يطبق عندما نهمل التأثيرات (الحدود) التي تحوي ثابت بلانك $\hbar$.

لنعد إلى (3.95) ونكتب $\nabla^2 S$ كمايلي:

$$\nabla^2 S=\nabla.\nabla S=\text{div grad } S=\text{div } p$$

وبالتالي يؤول التقريب (3.95) إلى:

$$\frac{\hbar}{p^2}\,\mathrm{div}\,p \ll 1 \qquad \textbf{(3.96)}$$

وعندما تحدث الحركة في بعد واحد نجد:

$$\frac{\hbar}{p^2}\left|\frac{dp}{dx}\right| = \frac{\left|d\left(\frac{\hbar}{p}\right)\right|}{dx} = \frac{d|\lambda|}{dx} \ll 1 \qquad \textbf{(3.97)}$$

أي أن شرط تطبيق التقريب السابق هو أن يكون طول موجة دوبري $\frac{1}{k} = \frac{\hbar}{p} = \lambda$ ثابتاً أو يتغير تغيراً طفيفاً جداً مع المسافة.

في الحالة الخاصة عندما يتحرك الجسيم ضمن الجهد $V(x)$ يكون:

$$p = \sqrt{2m[E - V(x)]} \qquad \textbf{(3.98)}$$

فإذا حسبنا التقريب السابق في هذه الحالة فإننا نجد:

$$\frac{\hbar}{p^2}\frac{dp}{dx} = -\frac{\hbar}{p^2}\,\frac{2m\frac{\partial V}{\partial x}}{2\sqrt{2m[E - V(x)]}} = \frac{\hbar m F}{P^3} \qquad \textbf{(3.99)}$$

حيث وضعنا:

$$F = F_x = -(\mathrm{grad}\ V)_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad \textbf{(3.100)}$$

فالتقريب شبه الكلاسيكي لايطبق عندما يكون الاندفاع P صغيراً جداً ويحدث هذا بصورة خاصة عندما تتساوي طاقة الجسيم الكلية مع الجهد الذي يتحرك فيه $(E \to V\,,\,p \to 0)$ ويجب الانتباه إلى وجود $\hbar$ في بسط الكسر مما يجعل الكسر صغيراً جداً وبالتالي فإن شروط هذا التقريب لاتتحقق إلا إذا انتهى الاندفاع إلى الصفر. وعندما يحدث ذلك $(p \to 0)$ لايمكن إهمال الحد الحاوي على التأثيرات الموجية ولابد من تطبيق الميكانيك الموجي أو الميكانيك الكمومي (ميكانيك الكم).

26- تابع التوزع الاحصائي:

من المفيد أن نختتم الفصل بإلقاء نظرة على طريقة دراسة جملة مادية مؤلفة من عدد هائل من الجسيمات كمجموعة جزيئات غاز موجودة في حيز معين، أو جزيئات مائع متحرك أو مجموعة من الجسيمات المجهرية ذات درجة حرارة عالية (بلازما)... الخ. كيف نتعامل "ميكانيكياً" مع هذه الجمل؟ كيف نحسب طاقتها وندرس خواصها الميكانيكية العامة؟

لقد درسنا فيما سبق جملاً مادية تحوي عدداً محدوداً من النقط المادية (الجسيمات) أو، بعبارة أخرى، ذات عدد محدود من الإحداثيات المعممة q_j والاندفاعات المعممة p_j ولاشك أن عدد المعادلات التفاضلية اللازمة للحصول على قانون الحركة يصبح كبيراً جداً وتزداد صعوبة الحصول على هذه المعادلات عندما يزداد عدد النقط بشكل هائل. فمن منا مستعد لحل مليون معادلة تفاضلية مثلاً؟ ومن سيجد عنده الوقت والقرطاسية الكافيين لانجاز هذه المسألة حتى بمساعدة الحاسوب. إن التفكير في حل هذه المسألة ميكانيكياً ضرب من الخيال. لذا كان لابد من البحث عن طرق أخرى غير تقليدية. ولحسن الحظ تبرز هنا حقيقة هامة وهي أن زيادة عدد الجسيمات يؤدي إلى بروز قانونية خاصة (ولنقل قانونية إحصائية) بحيث يمكن حل المشكلة بطرق إحصائية تختلف تماماً عن الطرق السابقة التي اتبعناها سابقاً. ومن الضروري لحل المشكلة بالطرق الجديدة التعرف على بعض المصطلحات.

لنعرف أولاً الفراغ الطوري، فنفرض عدداً من المحاور الاحداثية q_j وعدداً آخر من المحاور p_j بحيث نحصل على فراغ اقليدي ذي $2n$ بعداً (E_{2n}) يسمى الفراغ الطوري. إن وضع الجملة المادية المدروسة المؤلفة من N جسيم، في لحظة ما t يتعين بمجموعة من الإحداثيات المعممة q_j والاندفاعات $p_j(j=1,2,...,n)$ أي بنقطة وحيدة M في هذا الفراغ E_{2n} إحداثياتها $(p_1,p_2,...,p_n,q_1,q_2,...,q_n)$، أما وضع الجملة في لحظة ثانية $(t+\Delta t)$ فيتعين بنقطة أخرى مقابلة 'M وأن أي وضع للجملة يتمثل بنقطة

وحيدة في هذا الفراغ الطوري. وعندما يتغير وضع الجملة خلال الزمن فإن النقطة M نرسم مساراً Γ تقابل كل نقطة فيه حالة معينة من حالات الجملة.

لندرس الآن جملة مادية معزولة ونقسمها إلى جمل جزئية صغيرة لايمكن أن تكون معزولة فهي دائمة التفاعل فيما بينها وبالتالي فإن الحالة الميكانيكية للجملة الجزئية يتغير في كل لحظة. ويمكن دراسة الجملة ككل إذا درسنا كلاً من جملها الجزئية على حدة. غير أنه من الصعب القيام بهذه الدراسة من وجهة نظر ميكانيكية لأن ذلك يتطلب كتابة معادلات الحركة لكل منها وهذا صعب جداً كما أسلفنا سابقاً. ولكن هذه الصعوبة هنا تتضمن في طياتها بعض السهولة (!). إذ أنه بحكم التفاعل المعقد العشوائي بين الجملة الجزئية الموصوفة في الفراغ الطوري بالإحداثيات q_j, p_j ومايحيط بها فلابد لها من المرور بجميع حالاتها الميكانيكية الممكنة خلال فترة زمنية كافية. وبعبارة أخرى إذا أخذنا حجماً عنصرياً $\Delta p \Delta q$ من الفراغ الطوري بجوار النقطة $M(p_j, q_j)$. الموافقة للحالة الميكانيكية للجملة الجزئية في اللحظة t، فلابد أن يمر المسار الطوري لها عدداً كبيراً من المرات في عنصر الحجم السابق خلال زمن كاف، لنرمز بـــ Δt للزمن الذي تتواجد فيه الجملة الجزئية في عنصر الحجم $\Delta p \Delta q$ خلال كل الزمن T. من الواضح أنه يمكن اعتبار $\frac{\Delta t}{T}$ عندما $T \to \infty$ بمثابة احتمال وجود الجملة الجزئية في عنصر الحجم $\Delta P \Delta q$. لنرمز لهذا الاحتمال بالرمز W فيكون:

$$W = \lim_{T \to \infty} \frac{\Delta t}{T} \qquad \textbf{(3.101)}$$

أما احتمال (عنصر الاحتمال) أن يكون للمجموعة الجزئية اندفاعاً وإحداثيات محصورين بين $q_j + dq_j, p_j + dp_j$ فيمكن تعريفه بالشكل:

$$dW = \rho(p_1, p_2, ..., p_n,\ q_1, q_2, ..., q_n) dp_1, ..., dp_n, dq_1, ..., dq_n$$
$$= \rho(p, q) dp.dq \qquad \textbf{(3.102)}$$

حيث يمثل التابع $\rho(p_1,...,p_n, q_1,...,q_n)$ كثافة الاحتمال في الفراغ الطوري ويسمى تابع التوزع الاحصائي أو تابع التحاص (أو، أحياناً، تابع التوزع)، وحيث رمزنا بعنصر الحجم في الفراغ الطوري بالرمز dpdq ووضعنا $\rho(p,q)$ بدلاً من $\rho(p_1,...,p_n, q_1,...,q_n)$ إن احتمال أن تمر الجملة الجزئية بجميع أوضاعها الممكنة يساوي الواحد أي أن:

$$\int \rho(p,q)dp.dq = 1 \qquad \textbf{(3.103)}$$

حيث يؤخذ التكامل السابق بحيث يشمل جميع القيم الممكنة لــ p و q.
ويعبر عما يسمى شرط تنظيم التابع ρ.

تعتبر معرفة تابع التوزع $\rho(p,q)$ أساسية جداً لحل المشكلة، لأننا نستطيع بوساطته حساب متوسط أي قيمة فيزيائية $f(p,q)$ متعلقة بالجملة مهما كانت هذه القيمة، بالعلاقة:

$$\overline{f(p,q)} = \int f(p,q).\rho(p,q)dp.dq \qquad \textbf{(3.104)}$$

هذا وقد تكون f هي الطاقة أو كمية الحركة أو العزم الحركي أو أي كمية تشتق منها.

27- **نظرية ليوفيل**:

لنأخذ جملة جزئية ولنرصد الأوضاع التي تشغلها في الفراغ الطوري خلال فترة زمنية كبيرة جداً. ولنرمز للنقط المقابلة الممثلة لأوضاع هذه الجملة الجزئية بالرمز $A_1, A_2,....$ موافقة للحظات $t_1, t_2,...$ أن توزع النقط A_i في الفراغ الطوري يتناسب مع قيمة التابع ρ. كيف تصبح الصورة عندما لانأخذ جملة جزئية فقط وإنما تأخذ كل الجملة التي لدينا خلال لحظة زمنية معينة؟ يمكن التأكيد أن الجملة ككل تشغل النقط السابقة $A_1, A_2,....$ في أي لحظة t.
لنبحث عن أوضاع النقط $A_1, A_2,....$ خلال زمن قصير Δt، ويمكن فيه إهمال تفاعل الجمل الجزئية بعضها مع بعض، وبالتالي فإنها ستتحرك طبقاً لقوانين الميكانيك، وهي ستتوزع في الفراغ أثناء هذه الحركة بشكل مشابه تماماً للحظة t، ومتوافق مع قيم تابع التوزع ρ في كل نقطة. وهكذا يمكن اعتبار هذه الحركة

كأنها حركة "غاز" ما في الفراغ الطوري تلعب فيها النقط $A_1, A_2, ...$ دور جزيئات الغاز، ثم تطبق معادلة الاستمرار المعروفة التالية عليه، وهي:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \qquad \textbf{(3.105)}$$

حيث ρ هي الكثافة و $\vec{v}$ السرعة. وفي حالة الجريان المستقر يكون $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ وعندئذٍ توضع العلاقة السابقة بالشكل:

$$\operatorname{div}(\rho \, \vec{v}) = 0 \qquad \textbf{(3.106)}$$

لنحسب تفرق المتجه $\rho \, \vec{v}$ في فراغ ذي $2n$ بعداً، وهو يساوي طبقاً لتعريف التفرق:

$$\operatorname{div}(\rho . \vec{v}) = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) \qquad \textbf{(3.107)}$$

حيث v_j هي مركبات السرعة في الفراغ الطوري وهي تساوي P_j أو q_j تبعاً للمحور التي نسقط عليه. وهكذا نرى أن (3.107) توضع بالشكل:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial q_j}(\rho \dot{q}_j) + \frac{\partial}{\partial P_j}(\rho \dot{P}_j) \right] =$$

$$= \sum \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \rho}{\partial P_j} \dot{p}_j \right) + \sum_{j=1}^{n} \rho \left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} \right) \qquad \textbf{(3.108)}$$

ومن معادلات هاملتون (3.10) نجد:

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 H}{\partial \rho_j \partial q_j}, \quad \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j} \qquad \textbf{(3.109)}$$

وبتعويض (3.109) في (3.108) نحصل على العلاقة الهامة التالية:

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \rho}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = 0 \qquad \textbf{(3.110)}$$

وهي التعبير الرياضي عما يسمى <u>نظرية ليوفيل</u>. وتعني أن تابع التوزع الإحصائي يبقى <u>ثابتاً على المسارات الطورية للجمل الجزئية</u>. ويجب التنويه أننا

حصلنا على هذه النتيجة بفرض أن الجمل الجزئية المختلفة، التي تتألف منها الجملة المدروسة، لاتتفاعل بما بينها خلال الزمن الذي يمكن فيه اعتبار تابع التوزع الإحصائي $\rho(p,q)$ ثابتاً.

تمارين ومسائل

1- ليكن التابع السلمي $f(p,q)$ برهن صحة العلاقة:

$$[f, L_z] = 0$$

حيث L_z هو مسقط العزم الحركي $\vec{L}$ على المحور oz.

الحل:

نفرض أن f تابعاً للإحداثيات المعممة والاندفاعات المعممة $f(x,y,z,p_x,p_y,p_z)$ ونقوم بدوران حول المحور oz بزاوية عنصرية $\delta\varphi$ تتغير فيه الاندفاعات والإحداثيات بحيث يتحول التابع f إلى الصيغة: $f(x+\delta x, y+\delta y, z, p_x+\delta p_x, p_y+\delta p_y, p_z)$ ثم ننشر f فنجد:

$$f(x+\delta x, y+\delta y, z, p_x+\delta p_x, p_y+\delta p_y, p_z) = f(x,y,z,p_x,p_y,p_z) +$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\partial x + \frac{\partial f}{\partial y}\partial y + \frac{\partial f}{\partial p_x}\partial p_x + \frac{\partial f}{\partial p_y}\partial p_y \qquad (1)$$

حيث:

$$\delta x = -y\delta\varphi,\ \ \delta y = x\delta\varphi,\ \ \delta p_x = \delta m\frac{d}{dt}x = m\frac{d}{dt}\delta x =$$
$$m\frac{d}{dt}(-y\delta\varphi) = -p_y\delta\varphi\ \ ;\ \ \delta p_y = p_x\delta\varphi \quad (2)$$

أي أن:

$$\delta f = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}y + \frac{\partial f}{\partial y}x - \frac{\partial f}{\partial p_x}p_y + \frac{\partial f}{\partial P_y}p_y\right)\delta\varphi = 0 \qquad (3)$$

فإذا علمنا أن:

$$L_z = xp_y - yp_x \Rightarrow \frac{\partial L_z}{\partial x} = p_y,\ \frac{\partial L_z}{\partial P_x} = -y.... \qquad (4)$$

فيمكن وضع (3) كمايلي:

$$\delta f = \left(-\frac{\partial f}{\partial p_x}\frac{\partial L_z}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial p_y}\frac{\partial L_z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial L_z}{\partial p_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial L_z}{\partial p_y} \right)\delta\varphi$$

ومنه: $[L_z, f]\delta\varphi = 0 \Rightarrow [L_z, f] = 0$.

وهو المطلوب.

2- برهن أن المعادلات التالية:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \;,\; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

تكافىء معادلات لاغرانج.

الحل:

لدينا حسب تعريف H:

$$H = \sum p_j \dot{q}_j - L$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

ومن معادلات لاغرانج نحسب $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ فنجد:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}p_i = \dot{p}_i$$

وبالطريقة نفسها نحسب $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ فنجد:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_i p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

وهو المطلوب.

3- أوجد معادلة حركة جسيم إذا علمت أن تابع هاملتون له (شعاع الضوء):

$$H(\vec{p},\vec{r}) = \frac{c/\vec{p}/}{n(\vec{p},\vec{r})} \qquad (1)$$

حيث c هي سرعة الضوء و n قرينة انكسار الوسط الذي يتحرك فيه الجسيم.

ملاحظة:

إن تابع هاملتون لجسيم نسبوي هو التالي:

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + V(q)$$

وفي حالة انعدام الكمون وانعدام الكتلة (فوتون) وفرض أن شعاع الضوء ينتشر في الخلاء يكون $n(\vec{p},\vec{r}) = 1$ ويتحول تابع هاملتون إلى الشكل المعروف:

$$H = pc$$

الحل:

يمكن وضع تابع هاملتون (1) بالصيغة:

$$H = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} / n(\vec{p},\vec{r})$$

ويكون:

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = x^{\bullet} = \frac{cp_x}{n/\vec{p}/} - \frac{c/p/}{n^2}\frac{\partial n}{\partial p_x} \ldots$$

نعمم هذه العلاقة في الفراغ فنجد:

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \vec{r}^{\bullet} = \frac{c\vec{p}}{n/p/} - \frac{c/p/}{n^2}\frac{\partial n}{\partial \vec{p}} \qquad (2)$$

نشتق بالنسبة لــ x و y و z فنجد بسهولة معادلة هاملتون الثانية التالية:

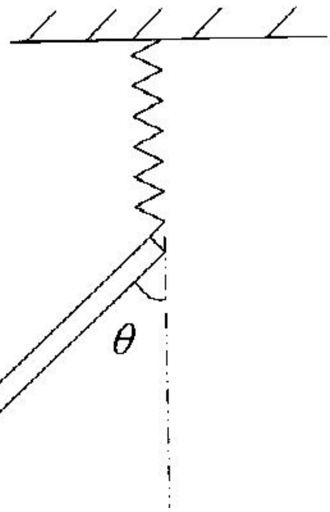
$$\vec{p}^{\bullet} = \frac{cp}{n^2}\frac{\partial n}{\partial \vec{r}} \qquad (3)$$

وإذا فرضنا أن الضوء ينتشر في الخلاء على محور Δ متجه واحدته $\vec{u}$

يكون $n=1$ و $\frac{\vec{p}}{p}=\vec{u}$ وعندئذٍ تجد أن سرعة الضوء (الفوتون) هي $r'=v=C$.

4- اكتب معادلات هاملتون لجسيمين يتفاعلان فيما بينهما بواسطة جهد (كمون) مركزي $V(r)$ بإهمال تأثير القوى الخارجية.

5- تعلق عارضة ثقيلة كتلتها m في نقطة ثابتة عن طريق نابض قساوته k شكل (3.2) بحيث يمكنها التحرك في مستوٍ شاقولي فقط ويتحرك النابض على المحور الشاقولي فقط. اكتب معادلات هاملتون لهذه الجملة.



الشكل (3.2)

6- أوجد معادلات هاملتون للدوامة (راجع الفصل السادس).

7- يدور سلك دائري مركزه O في مستويه الأفقي حول نقطة ثابتة A من محيطه بينما تتحرك حلقة p على هذا السلك بدون احتكاك.

أوجد قانون حركة الحلقة اعتماداً على معادلات هاملتون.

8- يدور سلك دائر قطره a وكتلته m2 حول محور ينطبق على قطره الشاقولي الثابت بينما تتحرك عليه دون احتكاك حلقة p كتلتها m برهن أن تابع هاملتون للجملة هو التالي:

$$H=\frac{1}{2ma^2}\left[p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{1+\sin^2\theta}\right]-mga\cos\theta$$

حيث θ هي الزاوية التي يصنعها $\overrightarrow{Op}$ مع Δ و φ زاوية دوران مستوي السلك.

9- اوجد قانون حركة جسيم إذا أعطي تابع هاملتون له بالعلاقة:

$$H(x,p)=\frac{p^2}{2}+\frac{\omega_0^2x^2}{2}+\lambda\left(\frac{p^2}{2}+\frac{\omega_0^2}{2}x^2\right)$$

10- احسب تابع هاملتون لجسيم إذا علمت أن تابع لاغرانج له هو:

$$L=\frac{\dot{x}^2}{2}-\frac{\omega^2x^2}{2}-\alpha x^3+\beta x\dot{x}^2$$

11- احسب أقواس بواصون التالية:

أ- $[L_i,x_j]$, $[L_i,p_j]$, $[L_i,L_j]$

ب- $\left[\left[a\vec{L},b\vec{p}\right],\left[a\vec{L},b\vec{r}\right],\left[a\vec{p},b\vec{r}\right]\right]$

ج- $\left[\vec{p},(ar)^2\right]$, $\left[\vec{p},r^n\right]$, $\left[\vec{L},\vec{r}\cdot\vec{p}\right]$

حيث b,a ثابتان و L_i,p_i,x_i هي المركبات الديكارتية لكل من $\vec{L},\vec{p},\vec{r}$ على الترتيب.

12- احسب أقواس بواصون $[A_i,A_j]$ حيث:

$$A_1 = \frac{1}{4}(x^2 + p_x^2 - y^2 - p_y^2),\ A_2 = \frac{1}{2}(xy + p_x p_y)$$
$$A_4 = x^2 + y^2 + p_x^2 + p_y^2\ ,\ A_3 = xp_y - yp_x)$$

14- برهن أن $\left[L_z, \vec{f}\right] = \vec{f} \times \vec{k}$ حيث f هو تابع شعاعي و k متجه الواحدة على oz.

توجيه: استفد من المسألة المحلولة (1).

15- احسب أقواس بواصون $\left[\vec{f}, a\,\vec{L}\right]$ حيث f أي تابع للإحداثيات والاندفاع a ثابت، $\vec{L}$ العزم الحركي.

16- احسب أقواس بواصون لمركبات السرعة لجسيم يتحرك في حقل مغناطيسي $\vec{B}$.

17- أوجد مسار وقانون حركة جسيم يتحرك في كل من الحقلين التاليين:

$$a)\quad V(x) = -Fx\quad ,\quad b)\quad V(x,y) = \frac{m\omega_1^2}{2}x^2 + \frac{m\omega_2^2}{2}y^2$$

وذلك اعتماداً على معادلة هاملتون-جاكوبي...

18- برهن صح المعادلة (3.94).

الفصل الرابع

مبادىء التغيرات

Variation Principles

استطاع ميكانيك نيوتن المرتكز على المبادىء الثلاثة المعروفة، صياغة قوانين الميكانيك بطريقة جيدة. أما الميكانيك التحليلي، المرتكز على التحليل الرياضي، والذي رأينا بعضاً من إنجازاته في الفصول السابقة، فقد قدم لنا معادلات حركة جديدة، ولكن هذا ليس كل شيء وسنرى في هذا الفصل عدة طرق تؤدي إلى معادلات الحركة تستند جميعها إلى مايسمى مبادىء التغيرات التي سنشرح أسسها العامة فيمايلي.

يبدو أن الحركة الحقيقية التي تحدث فعلاً تحت تأثير القوى المطبقة على جملة ما لابد أن تحقق بعض الشروط التي لاتحققها حركات افتراضية أخرى لايمكن أن تحدث ولاتحقق شروط المسألة الميكانيكية. وهذا هو الأساس الذي يرتكز عليه مبدأ التغيرات الذي سيقودنا إلى المعادلات نفسها التي حصلنا عليها سابقاً بطرق أخرى. ولن نحصل مباشرةً على قوانين الحركة ولكننا سنضع الإطار العام الذي يمكن أن تحدث ضمنه أية حركة.

28- **مبدأ الفعل الأصغر** (**مبدأ هاملتون – اوسترغرادسكي**):

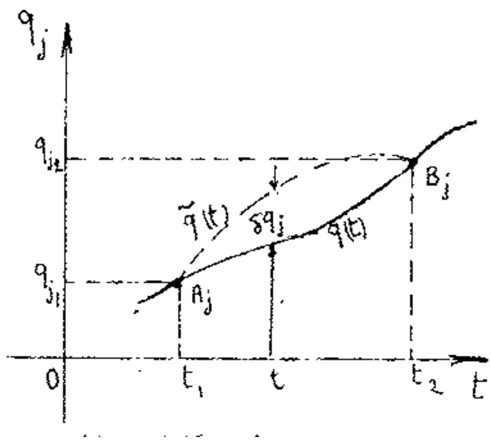
لتكن جملة مادية مؤلفة من N نقطة M_i إحداثياتها $(x_i, y_i . z_i)$ $(i = 1,..., N)$ موصوفة في فضاء الإحداثيات المعممة بـــ n احداثي معمم $(j = 1, 2, ..., n)$ ولنفرض أن تابع لاغرانج لها هو $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ ولنعد إلى الفضاءين الإقليديين E_{3N+1} و E_{n+1} المشكلين في الفصل السابق ثم نبحث

عن معادلات الحركة انطلاقاً مما يسمى مبدأ الفعل الأصغر ولهذا نأخذ الدالة في الفضاء E_{n+1} التالية:

$$\tilde{q}_j(t) = q_j(t) + \delta q_j(t) = q_j(t) + \varepsilon\eta_j(t) \quad \textbf{(4.1)}$$

حيث يمثل المقدار $\delta q_j(t)$ تغيراً طفيفاً للدالة $q_j(t)$ عبر عنه بواسطة الدالة $\eta_j(t)$ القابلة للاشتقاق، والتي تبين مقدار هذا التغير وقد تم ضرب التابع $q_j(t)$ بوسيط صغير ε ينتهي إلى الصفر.

يمثل الشكل (4.1) المعادلة (4.1)، حيث يعبر الخط المتصل فيه عن قانون الحركة الحقيقية التي تحدث فعلاً تحت تأثير القوى المطبقة بينما يعبر الخط المتقطع عن الدالة $\tilde{q}_j(t)$. أما الفرق الشاقولي بينهما فيمثل $\delta q_j(t)$. مع العلم أن النقطة A_j تمثل وضع الجملة المادية في اللحظة t_1 و B_j تمثل هذا الوضع في اللحظة t_2 في الفضاء E_{n+1}، وقد اقتصرنا على رسم المسار A_jB_j في فضاء إقليدي $E_2(n=1)$ يحوي الإحداثي المعمم q_j والزمن t فقط.



الشكل (4.1)

لتكن النقطتان A و B من الفضاء E_{n+1} الممثلتين لوضع الجملة في اللحظتين t_1 و t_2 على الترتيب. يمكن رسم عدد لانهائي من المسارات بين A و B. والسؤال الآن ماهو المسار المقابل للحركة الحقيقية التي تحدث فعلاً في الفضاء E_{3N+1}؟

يجب على هذا السؤال مبدأ الفعل الأصغر الذي ينص على مايلي:

إن المسار بين A و B الذي يوافق الحركة الحقيقية في الفضاء E_{3N+1} هو ذلك المسار المقابل لنهاية صغرى لتابع الفعل S، المعرف في الفصل السابق، بالعلاقة:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t)dt \quad \textbf{(4.2)} \qquad *$$

ولكي يكون للتابع (الدالة) S نهاية صغرى يجب أن ينعدم تفاضلها $(\delta S = 0)$ على أن يؤخذ هذا التفاضل بثبات الزمن وبحيث يتحقق الشرطان التاليان:

$$\delta q_j\big|_{t=t_1} = \delta q_j\big|_{t=t_2} = 0 \qquad \textbf{(4.3)}$$

لنفاضل الآن الدالة S ضمن الشروط المذكورة ثم نعدم δS وسنجد أننا نحصل بالفعل على معادلات لاغرانج التي رأيناها في الفصل الثاني.

$$\textbf{(4.4)} \qquad \delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t)dt = \int_{t_1}^{t} \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j\right]dt = 0$$

فإذا علمنا أن $\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt}\delta q_j$ وحسبنا التكامل الثاني بالتجزئة نجد:

$$\textbf{(4.5)} \quad \int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\delta \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\delta q_j = \sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\sum\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\partial q_j dt$$

ينعدم الحد الأول طبقاً لـــ (4.3) فإذا دمجنا الحد الباقي في المعادلة (4.4) نحصل على المعادلة:

$$\delta S = \sum_{j=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j .dt = 0 \qquad \textbf{(4.6)}$$

---

* – يختلف حد التكامل الأعلى هنا عما رأيناه في الفصل السابق عند الحصول على معادلة هاملتون – جاكوبي حيث تركناه مفتوحاً t، أما هنا فقد وضعناه t_2 وليس t كي نستفيد من الشرط (4.3)، لهذا اقتضى التنويه.

ولكن ينعدم δS مهما كانت δq_j يجب أن تتحقق العلاقة:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}\right)dt=0 \qquad \textbf{(4.7)}$$

ولكي يتحقق ذلك من أجل أي لحظتين اختياريتين t_1 و t_2 مهما كان الفارق بينهما $(\Delta t=t_2-t_1)$ يجب أن ينعدم المستكمل. وهذا يؤدي بدوره إلى معادلات لاغرانج التالية:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad \textbf{(4.8)}$$

لنتساءل الآن هل يوجد تابع لاغرانج واحد يحقق المعادلات (4.8)؟

للإجابة عن هذا السؤال نأخذ تابعاً آخر L' محققاً للعلاقة:

$$L'=L+\frac{d}{dt}f(q_1,q_2,...,q_n,t) \qquad \textbf{(4.9)}$$

ولنحسب تابع الفعل المقابل لـــ L' فنجد:

$$S'=\int_{t_1}^{t_2}L'dt=\int_{t_1}^{t_2}Ldt+f(t_B,q_{jB})-f(t_A,q_{jA}) \qquad \textbf{(4.10)}$$

أي أن:

$$S'=S+f(t_B,q_{jB})-f(t_A,q_{jA}) \qquad \textbf{(4.11)}$$

وبالمفاضلة نجد:

$$\delta S'=\delta S+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f(t_B,q_{jB})}{\partial q_{jB}}\delta q_{jB}-\frac{\partial f(t_A,q_{jA})}{\partial q_{jA}}\delta q_{jA}\right] \qquad \textbf{(4.12)}$$

والحدان الأخيران معدومان طبقاً لـــ (4.3) أي أن $\delta S=\delta S'$ وبالتالي يكون:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L'}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,...,n) \qquad \textbf{(4.13)}$$

أي أنه يوجد عدد لانهائي من توابع لاغرانج تحقق المعادلات (4.13) وأن هذه المعادلات تبقى صحيحة عند إضافة أي مشتق كلي لتابع ما للإحداثيات المعممة والزمن.

من المفيد، في نهاية هذه الفقرة، أن تستنتج مبدأ الفعل الأصغر من المبدأ الديناميكي (التحريكي) للانتقالات الافتراضية الذي يطلق عليه أحياناً مبدأ دالمبير–لاغرانج (الفصل الثاني). لدينا طبقاً للمبدأ المذكور:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\,\vec{W}_i\right).\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\delta q_j \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\,\vec{W}_i\right).\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0 \qquad \textbf{(4.14)}$$

ومنه طبقاً لما رأيناه في الفصل الثاني نجد:

$$\sum_{j=1}^{n}\delta q_j\left(Q_j + Q_j' + \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \qquad \textbf{(4.15a)}$$

وهذه المعادلة صحيحة في كل لحظة وبالتالي يمكن استكمالها بالزمن بفرض انعدام القوى المعممة غير المشتق من كمون $(Q_j' = 0)$:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{n}\delta q_j\left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right]dt \qquad \textbf{(4.15b)}$$

نلاحظ عندئذ أن الطرف الأيسر من (4.15a) هو تفاضل التابع L وهكذا نجد أخيراً مبدأ الفعل الأصغر نفسه التالي:

$$\delta S = \delta\int L.dt = 0 \qquad \textbf{(4.16)}$$

29- استنتاج معادلات هاملتون من مبدأ الفعل الأصغر:

لدينا طبقاً للمبدأ المذكور:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_j,\dot{q}_j,t)dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}(P_j\dot{q}_j - H)dt \qquad \textbf{(4.17)}$$

وبإجراء التفاضل نجد:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(P_j\delta\dot{q}_j + \dot{q}_j\delta P_j\right) - \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial P_j}\delta P_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_j}\delta q_j\right)\right]dt = 0 \qquad \textbf{(4.18)}$$

فإذا علمنا أن:

$$\int_{t_1}^{t_2} P_j.\delta \dot{q}_j.dt = \int P_j \frac{d}{dt}\delta q_j.dt = P_j\delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_j \frac{dP_j}{dt} dt \quad \textbf{(4.19)}$$

وأن الحد الأول من الطرف الثاني يساوي الصفر فإننا نجد بالتبديل في (4.18):

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta P_j - \left(\dot{P}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \partial q_j \right] dt = 0 \qquad \textbf{(4.20)}$$

ولكي تتحقق هذه المعادلة في كل لحظة يجب أن ينعدم المستكمل، ومنه:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial P_j} \right) \delta P_j - \left(\dot{P}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] = 0 \qquad \textbf{(4.21)}$$

ولكي تتحقق (4.21) مهما كان المتحولان المستقلان P_j و q_j يجب أن يكون:

$$\frac{\partial H}{\partial P_j} = \dot{q}_j \;, \; \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{P}_j, \quad (j = 1, 2, ..., n) \qquad \textbf{(4.22)}$$

وهي المعادلات القانونية (معادلات هاملتون) نفسها.

30- التفاضل الافتراضي (المتساوي الزمن) والتفاضل الكلي والعلاقة بينهما:

لقد تعرفنا في هذا الفصل على مبدأ هام من مبادىء التغيرات ولكن لابد لنا كي نتابع دراسة المبادىء الباقية من شرح أنواع أخرى من التفاضلات غير تلك التي استخدمناها في المبدأ السابق.

لتكن الدالة:

$$q = f(t) \qquad \textbf{(4.23)}$$

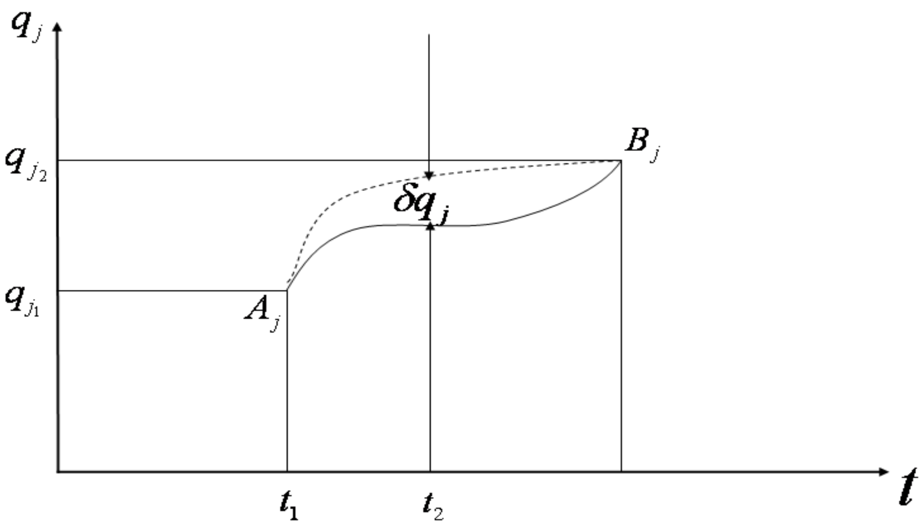
إن تفاضلها الكلي هو:

$$dq = f'(t)dt \qquad \textbf{(4.24)}$$

وهو تفاضل التابع q عندما يتغير المتحول (الزمن). ومن الواضح أن هذا التفاضل يقابل الحركة التي تحدث فعلاً والتي قانونها (4.23) وأن $q^{\bullet}=\frac{dq}{dt}$ ويمثل ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع المحور الأفقي (محور الزمن كما في الشكل 4.2). أما التفاضل الافتراضي او المتساوي الزمن فيحدث ثبات المتحول وهو ما عبرنا عنه بالعلاقة (4.1) أي أن:

$$\varepsilon\eta(t)\delta q=\tilde{q}-q=\eta\tau(t) \qquad \textbf{(4.25)}$$

وهو التغير الذي استخدمناه في الفقرتين السابقتين.



الشكل (4.2)

لنحسب مشتق δq بالنسبة للزمن فنجد:

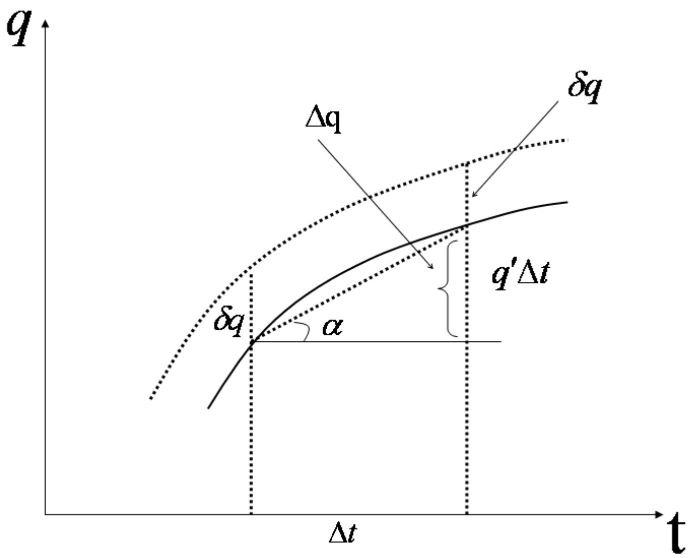
$$\frac{d}{dt}\delta q=\tilde{q}^{\bullet}-q^{\bullet} \qquad \textbf{(4.26)}$$

سنعرض الآن تغيراً آخراً للدالة q يتغير فيه المتحول t ليصبح $\tilde{t}$ طبقاً للعلاقة:

$$\tilde{t}=t+\varepsilon\zeta(t), \quad \Delta t=\tilde{t}-t=\varepsilon\zeta(t) \qquad \textbf{(4.27)}$$

حيث $\zeta(t)$ هي دالة قابلة للاشتقاق، وعندئذٍ نجد طبقاً للشكل (4.3) أن تغير q المقابل لـــ Δt (والذي يسمى التغير الكلي) هو:

$$\Delta q=\delta q+q^{\bullet}\Delta t \qquad \textbf{(4.28)}$$



الشكل (4.3)

وهذا التغير، كما نرى، مؤلف من قسمين: تغير متساوي الزمن δq وتغير ناتج عن تغير المتحول هو $q^{\bullet}\Delta t$. إن مشتق Δq بالنسبة للزمن هو:

$$\frac{d}{dt}\Delta q = \delta q^{\bullet} + q^{\bullet\bullet}\Delta t + q^{\bullet}\frac{d\Delta t}{dt} \qquad \textbf{(4.29)}$$

فإذا حسبنا $\Delta q^{\bullet}$ من (4.28) فإننا نجد:

$$\Delta q^{\bullet} = \delta q^{\bullet} + q^{\bullet\bullet}\Delta t \qquad \textbf{(4.30)}$$

وهي لاتساوي $\frac{d}{dt}\Delta q$ إلا إذا كان $\frac{d\Delta t}{dt} = 0$ أي عندما يحدث Δt المعرف في (4.27) بثبات الزمن.

31- مبدأ موبيرتوي – لاغرانج (مبدأ أولر – لاغرانج):

يختلف المؤلفون على تسمية هذا المبدأ لأن موبيرتوي صاغه عام (1744) وسماه مبدأ الفعل الأصغر وطبقه على نظرية الاصطدام وعلى مسائل أخرى ولكن أولر برهنه، أما لاغرانج فقد عممه على كثير من مسائل تحريك المجموعات المادية.

لقد كنا عرفنا في الفصل السابق تابع فعل لاغرانج أو تابع الفعل الأصغر W الذي سنستخدمه الآن، ولكننا سنبدأ من تابع الفعل (4.2) المعرف سابقاً ونضعه بالصيغة التالية:

$$S = \int_{t'}^{t_1} L.dt = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)dt$$

وسنفرض أن الجملة المدروسة تحقق قانون مصونية الطاقة $T + V = E = Const.$ وبالتالي يكون:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - E + T)dt = \int_{t_1}^{t_2} 2Tdt - E(t_2 - t_1) \qquad \textbf{(4.31)}$$

وطبقاً لــ (3.84) يكون:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} 2Tdt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 dt \qquad \textbf{(4.32)}$$

ومن (4.31) و (4.32) نجد:

$$W = S + E(t_2 - t_1) \qquad \textbf{(4.33)}$$

ينص مبدأ موبيرتوي – لاغرانج على مايلي:

تحدث الحركة الحقيقية لجملة مادية خاضعة لارتباطات هولونومية ومستقرة بين بداية A (موافقة لوضع الجملة في الفضاء E_{n+1} في اللحظة t_1) ونهاية B (موافقة لوضع الجملة في الفضاء E_{n+1} في اللحظة t_2) بحيث ينعدم التفاضل الكلي لتابع الفعل الأصغر W أي:

$$\Delta W = \Delta \int_{t_1}^{t_2} 2Tdt = 0 \qquad \textbf{(4.34)}$$

مع العلم أن هذا التفاضل هو تفاضل كلي ويؤخذ بثبات الطاقة E أي:

$$\Delta E = \Delta(T + V) = 0 \qquad \textbf{(4.35)}$$

ومن الضروري التأكيد أن التفاضل (4.34) يختلف جذرياً عن التفاضل في المبدأ السابق فهو لن يكون متساوي الزمن (Δ وليس δ) ولابد أن يحقق

العلاقة (4.35). إن V تابع للمكان؛ فهو يتغير من نقطة لأخرى وبالتالي فإن T تتغير أيضاً بحيث يبقى مجموعهما ثابتاً. وأن المسار الحقيقي الذي يوافق الحركة التي تحدث فعلاً لن يتقاطع مع أي مسار افتراضي آخر بين النقطتين A و B لأنهما لو تقاطعا لأمكن رسم مماس واحد لمنحنيين من نقطة واحدة. ولبرهان ذلك ندرس حركة ذات بعد واحد طاقتها الكلية E:

$$E = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + V(q) \quad \textbf{(4.36)}$$

ومنه نحصل على ميل المماس للمنحني $q(t)$:

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{a(q)}[E - V(q)]} \quad \textbf{(4.37)}$$

وبما أن $V(q)$ هو تابع وحيد التعيين (يأخذ قيمة واحدة في كل نقطة) نستطيع التأكيد أنه إذا تقاطع المنحني الممثل للحركة الحقيقية مع أي منحني آخر في نقطة ما M فإن V يأخذ القيمة نفسها للمنحنيين وبالتالي $\frac{dq}{dt}$ أيضاً. وهذا يعني رسم مماس واحد لمنحنيين مختلفين (الحقيقي والافتراضي) من النقطة M نفسها، وهذا غير معقول وبالتالي لن يتقاطعا.

لنحسب الآن ΔW اعتماداً على العلاقة (4.33).

$$\Delta W = \Delta S + E\Delta t_2 - E\Delta t_1 = \Delta S + E\Delta t_2 \quad \textbf{(4.38)}$$

لأن كل المسارات تنطلق من A في اللحظة نفسها $(\Delta t_1 = 0)$ ولكنها لن تصل كلها إلى B في اللحظة t_2 لأن التفاضل غير متساوي الزمن؛ فكل مسار افتراضي له تفاضله الخاص، وطبقاً لـــ (4.28) نجد:

$$\Delta S = \delta S + \dot{S}\Delta t_2 = \delta S + L\Delta t_2 = \delta S + (T - V)\Delta t_2$$
$$= \delta S + (T - E + T)\Delta t_2 \quad \textbf{(4.39)}$$

وبالتبديل في (4.38) نجد:

$$\Delta W = \delta S + 2T\delta t_2 \quad \textbf{(4.40)}$$

من السهل حساب δS اعتماداً على تعريفها (4.2) حيث نجد:

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)\delta q_j dt+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j .dt \qquad \textbf{(4.41)}$$

نحسب التكامل الثاني بالتجزئة:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j .dt=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{n}\delta q_j\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}dt$$

ثم نبدل δq_j الموجودة في الحد الأول من الطرف الثاني بقيمتها من (4.28) فنجد:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta \dot{q}_j .dt=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\Delta q_j\Big|_{t_1}^{t_2}-\sum\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{n}\delta q_j\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}dt$$

(4.42)

والحد الأول من الطرف الثاني يساوي الصفر طبقاً لنص المبدأ، أما الحد الذي يليه فيساوي $2T\Delta t_2$ (كل المسارات تبدأ من A في اللحظة نفسها t_1 وبالتالي $2T\Delta t_1=0$ ولكنها لن تصل كلها إلى B في اللحظة t_2) وعندئذٍ إذا بدلنا في (4.41) نحصل على δS التالية:

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{\partial V}{\partial q_j}\right]\delta q_j .dt-2T\Delta t_2 \qquad \textbf{(4.43)}$$

نبدل أخيراً δS بقيمتها السابقة في (4.40) فنجد:

$$\delta W=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{n}\left[-\frac{d}{dt}\frac{\partial t}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{\partial V}{\partial q_j}\right]\partial q_j .dt=0 \qquad \textbf{(4.44)}$$

ولكي تتحقق هذه العلاقة مهما كانت δq_j و t يجب أن تتحقق المعادلة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial V}{\partial q_j},\ \ (i=1,2,....,n) \qquad \textbf{(4.45)}$$

وهي معادلات لاغرانج ما يؤكد صحة المبدأ.

32- الصيغ المختلفة للمبدأ السابق:

يعبر عن المبدأ السابق بصيغ مختلفة؛ فقد وضع موبرتوي الطاقة الحركية بشكل آخر ولذلك صاغ المبدأ رياضياً كمايلي:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i v_i^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \vec{v}_i . \vec{v}_i \, dt \qquad \textbf{(4.46)}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i . d\vec{\sigma}_i$$

حيث $/ d\sigma_i /$ هو طول القوس. يحسب التكامل السابق بين النقطتين A و B المقابلتين لوضع الجملة المدروسة في اللحظتين t_1 و t_2 في الفضاء E_{3N+1}.

عبر جاكوبي عن التكامل السابق بواسطة تكامل الطاقة كمايلي:

$$2T = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\overline{d\sigma_i}}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\overline{dt}^2} \sum_i m_i . \overline{d\sigma_i}^2 \qquad \textbf{(4.47)}$$

نعبر عن الطاقة الحركية بدلالة E و V ثم نحسب الزمن من (4.47) فنجد:

$$dt = \sqrt{\frac{\sum_i^N m_i \overline{d\sigma_i}^2}{2(E - V)}} \qquad \textbf{(4.48)}$$

ثم نبدل dt بقيمتها هذه في (4.46) فنجد:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = \int_A^B 2(E - V) \left[\frac{\sum_i m_i \overline{d\sigma_i}^2}{2(E - V)} \right]^{1/2} = \int_A^B \sqrt{2(E - V)} \sqrt{\sum_i m_i \overline{d\sigma_i}^2}$$

(4.49)

أما إذا عبرنا عن الطاقة الحركية بدلالة السرع المعممة (راجع الفصل الثاني) طبقاً للعلاقة:

$$T = \frac{1}{2}\sum a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2\overline{dt}^2}\sum a_{ij}dq_i dq_j \qquad \textbf{(4.50)}$$

فإننا نجد عوضاً عن (4.49) (بعد التعبير عن الكمون بدلالة الإحداثيات المعممة q_j) المعادلة التالية:

$$W = \int_A^B \sqrt{2\left[E - V(q_1, q_2, .., q_n)\right]\sum_{ij} a_{ij}dq_i dq_j} \qquad \textbf{(4.51)}$$

وفي الحالة الخاصة عندما ينعدم الكمون (الجملة المدروسة حرة) يمكن اخراج E خارج التكامل ثم إهمالها لأن المبدأ ينص على أن $\delta W = 0$. وهكذا نحصل على الصيغة التالية لـــ W:

$$W = \int_A^B \sqrt{\sum_{i=1}^N m_i \overline{d\sigma_i}^2} = \int_A^B \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}dq_i dq_j} \qquad \textbf{(4.52)}$$

لكن المقدار المجذور ليس إلا مربع طول قوس في فضاء ذي n بعداً أي $\overline{d\sigma}^2$ ومنه نجد:

$$W = \int_A^B d\sigma \qquad \textbf{(4.53)}$$

وهكذا تؤول حركة جملة مادية هولونومية غير خاضعة لأي ارتباطات أو قوى (حركة عطالية) إلى مسألة خطوط جيوديزية (راجع الفقرة الأخيرة من هذا الفصل) لأن الحركة الحقيقية تحقق المبدأ (4.34). وبالتالي يمكن نص مبدأ موبرتوي– جاكوبي في هذه الحالة كمايلي:

تحدث الحركة العطالية لجملة مادية بحيث تتحرك نقطها على خطوط جيوديزية (أقصر طريق) في فضاء ذي n بعداً.

والجدير بالذكر أنه يمكن رد الحركة إلى حركة على خطوط جيوديزية حتى لو لم ينعدم الكمون ولكن بشرط أن لايتبع الزمن بشكل صريح.

في هذه الحالة يكون:

$$2(E - V)\sum_{i=1}^n a_{ij}dq_i dq_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}dq_i dq_j \qquad \textbf{(4.54)}$$

حيث:

$$b_{ij} = 2(E - V)a_{ij} \tag{4.55}$$

وبالتالي يمكن وضع تابع فعل لاغرانج كمايلي:

$$W = \int_A^B \left[\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} dq_i dq_j \right] \tag{4.56}$$

ومنه نستنتج أنه يمكن دراسة حركة جملة مادية هولونومية كأنها حركة على خطوط جيوديزية في فراغ "ريماني" يعرف بالعلاقة:

$$\overline{d\sigma}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} dq_i dq_j \tag{4.57}$$

لعل من المفيد في نهاية هذه الفقرة التأكيد على التشابه الحاصل بين هذا المبدأ ومبدأ "فرما" في الضوء الهندسي الذي ينص على أن الشعاع الضوئي يسلك الطريق الذي يستغرق أقصر زمن ممكن بين نقطتين A و B (نهاية صغرى) أي أن:

$$t_{AB} = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{d\sigma}{v} = \frac{1}{C} \int n(x,y,z) d\sigma \tag{4.58}$$

حيث n قرينة انكسار الوسط الذي ينتشر فيه الشعاع الضوئي، C سرعة الضوء في الخلاء.

لنأخذ، على سبيل المثال، جسيماً واحداً يتحرك في فراغ ثلاثي. إن مربع طول القوس الذي يجتازه هذا الجسيم خلال زمن dt هو: $\overline{d\sigma}^2 = \overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 + \overline{dz}^2$ وبالتالي فتابع الفعل الأصغر له هو:

$$W = \int_A^B \sqrt{2m(E - V)} \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 + \overline{dz}^2} = \int_A^B \sqrt{2m(E - V)} d\sigma \tag{4.59}$$

وبالمقارنة مع (4.58) نحصل على قرينة انكسار الوسط بدلالة الطاقة والكمون:

$$n = C_1 \sqrt{E - V(x,y,z)} \tag{4.60}$$

حيث C_1 ثابت أبعاده $M^{-\frac{1}{2}}L^{-1}T$.

وهكذا نرى أن حركة ما في الميكانيك التقليدي في حقل مستقر تقابل مسألة في الضوء الهندسي، والعكس صحيح.

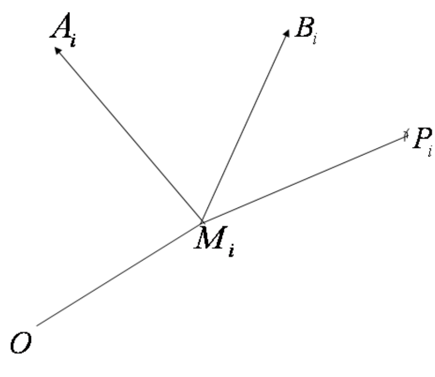
33- **مبدأ القسر الأصغر** (**مبدأ غوص**):

تتجلى أهمية هذا المبدأ في إمكانية الحصول ،انطلاقاً منه، على معادلة الحركة لجملة مادية في الحالة العامة سواءً كانت الارتباطات هولوتومية أو لاهولونومية.

لفهم مبدأ غوص لابد أولاً من تعريف القسر (Compulsion) الذي يعرف كمايلي:

القسر هو انحراف الجملة المادية المتحركة تحت تأثير قوى فعالة $\underline{F_i}$ والخاضعة لارتباطات هولونومية ولاهولونومية عن حركتها الطبيعية التي كان يمكن أن تحدث لها تحت تأثير القوى الفعالة فقط، اعتباراً من لحظة معينة، فيما لوحررنا الجملة من الارتباطات في تلك اللحظة بالذات.

لتوضيح مفهوم القسر نفرض جسيماً من الجملة كتلته m_i موجوداً في النقطة $M_i(x_i,y_i,z_i)$ في اللحظة t شكل (4.4). إذا تحرر الجسيم من القوى الفعالة والارتباطات فإنه سينتقل خلال زمن صغير τ إلى النقطة A_i بحيث يكون (انظر الشكل):



الشكل (4.4)

$$\overrightarrow{M_iA_i} = \vec{v}_i\,\tau \quad \textbf{(4.61)}$$

أما إذا تحرك الجسيم تحت تأثير القوى الفعالة $\vec{F}_i$ دون أن يخضع لأي ارتباطات فسينتقل إلى النقطة B_i بحيث يكون:

$$\overrightarrow{M_iB_i} = \vec{v}_i\,\tau + \frac{\vec{F}_i}{m_i}\tau^2 \quad \textbf{(4.62)}$$

وأخيراً إذا تحرك الجسيم تحت تأثير القوى الفعالة $\vec{F}_i$ والارتباطات فسينتقل إلى النقطة B_i بحيث يكون:

$$\overrightarrow{M_iC_i} = \vec{v}_i\,\tau + \frac{1}{2}\vec{w}_i\,\tau^2 \quad \textbf{(4.63)}$$

حيث $\vec{W}_i = \ddot{\vec{r}}_i$ هو التسارع الذي يكتسبه الجسيم نتيجة لتأثير القوى الفعالة $\vec{F}_i$ وقوى الارتباط $\vec{R}_i$. وعندئذٍ يعطى الانحراف المعرف سابقاً، بالمتجه $\overrightarrow{B_iC_i}$ التالي:

$$\overrightarrow{B_iC_i} = \overrightarrow{M_iC_i} - \overrightarrow{M_iB_i} = \frac{1}{2}\left(\ddot{\vec{r}}_i - \frac{\vec{F}_i}{m_i}\right) \quad \textbf{(4.64)}$$

استخدم غوص مقداراً يتناسب مع الانحراف السابق؛ فعرف القسر الذي يتعرض له الجسيم M_i بالعلاقة:

$$ZW_i = \frac{1}{2}m_i\left(\ddot{\vec{r}}_i - \frac{\vec{F}_i}{m_i}\right)^2 \quad \textbf{(4.65)}$$

أما القسر الذي تتعرض له جملة الجسيمات فهو:

$$ZW_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\ddot{\vec{r}}_i - \frac{\vec{F}_i}{m_i}\right)^2 \quad \textbf{(4.66)}$$

أو بدلالة الإحداثيات:

$$ZW=\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\ddot{x}_i-\frac{X_i}{m_i}\right)^2+\left(\ddot{y}_i-\frac{y_i}{m_i}\right)^2+\left(\ddot{z}_i-\frac{z_i}{m_i}\right)\right] \quad \textbf{(4.67)}$$

<u>ينص مبدأ غوص على مايلي:</u>

تحدث حركة جملة مادية خاضعة لارتباطات هولونومية ولاهولونومية بحيث يكون القسر المعرف بالعلاقة (4.66) أصغرياً:

$$\delta ZW=0 \quad \textbf{(4.68)}$$

هذا مع العلم أن التفاضل السابق يجب أن يشمل التسارع فقط، ولهذا يسمى التفاضل الغوصي (نسبة إلى العالم غوص) أي أنه يحسب طبقاً للعلاقات:

$$\delta\vec{r}_i=\delta\vec{v}_i=0\ ,\ \delta\vec{F}_i=0\ ,\ \delta\ddot{\vec{r}}_i\neq 0 \quad \textbf{(4.69)}$$

وهكذا يصاغ المبدأ رياضياً بالشكل:

$$\delta ZW=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right).\delta\vec{r}_i=0 \quad \textbf{(4.70a)}$$

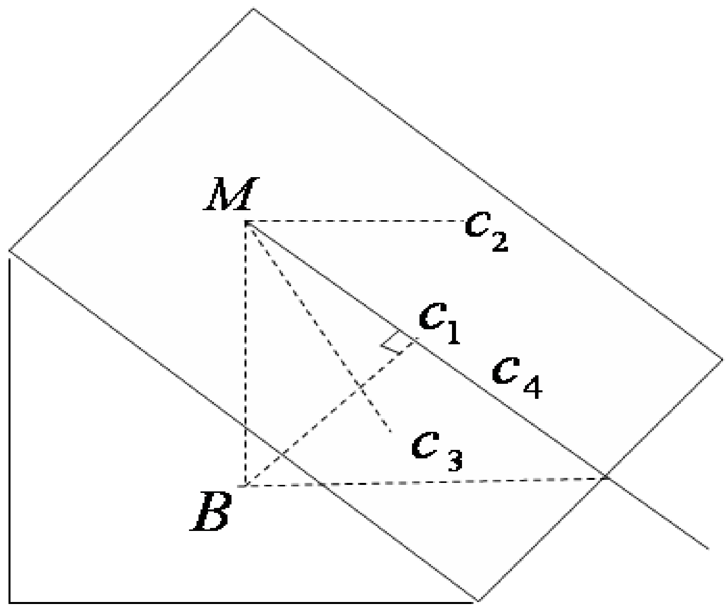
ومنه نحصل على الصيغة الرياضية للمبدأ بالإحداثيات الديكارتية:

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\vec{X}_i-m_i\ddot{x}_i\right)\delta\ddot{x}_i+\left(Y_i-m_i\ddot{y}_i\right)\delta\ddot{y}_i+\left(Z_i-m_i\ddot{z}_i\right)\delta\ddot{z}_i\right]=0$$

(4.70b)

مثال:

احسب تسارع جسيم ثقيل يمكنه التحرك دون سرعة ابتدائية على مستوٍ يميل على الأفق بزاوية α.



الشكل (4.5)

من الواضح (شكل 4.5) أن الحركات الافتراضية للجسيم يمكن أن تكون بالاتجاهات $C_1, C_2, C_3, ...$ أما إذا تحرر الجسيم من السطح فيمكن أن يسقط تحت تأثير ثقله إلى B. إن معادلات الحركة الممكنة هي:

$$\overrightarrow{MC_1} = \frac{1}{2}\vec{W}_i\,\tau^2 \quad , \quad \overrightarrow{MC_2} = \frac{1}{2}\vec{W}_i\,\tau^2 .... \quad \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\vec{g}\;t^2$$

ويبدو من الشكل أن أصغر قسر هو $\overrightarrow{MC_1} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BC_1}$ وبالتالي سيتحرك الجسيم باتجاه C_1 حيث يكون:

$$/\,MC_1\,/ = MB\sin\alpha = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha$$

أي أن تسارع الجسيم على السطح المائل هو:

$$W = W_1 = g\sin\alpha$$

ومنه النتيجة التالية:

يتحرك جسيم ثقيل موضوع على سطح مائل بزاوية α إذا ترك دون سرعة ابتدائية، على أقرب منحدر بتسارع $W_1 = g\sin\alpha$.

4الحصول على معادلات الحركة اعتمادا ، على مبدأ غوص:

لتكن جملة مادية مؤلفة من N جسيم إحداثياتها (x_i, y_i, z_i) ولنبحث عن معادلة حركتها.

إذا كانت الجملة طليقة (لاتؤثر عليها أي قيود) تكون جميع انتقالاتها الافتراضية مستقلة وبالتالي نحصل على معادلات الحركة مباشرةً طبقاً لـــ (b4.70) وهي:

$$\vec{F_i} = m_i \vec{W_i} \quad (i = 1, 2, ..., N) \qquad \textbf{(4.71)}$$

في الحالة العامة عندما تتأثر الجملة بـــ k ارتباط هولونومي يعبر عنها بالمعادلات:

$$f_\alpha(...., x_i, y_i, z_i, ...t) = 0 \quad , \quad (\alpha = 1, 2, ..., k) \qquad \textbf{(4.72)}$$

و ℓ ارتباطاً لاهولونومياً يعبر عنها بالمعادلات:

$$\varphi_\beta\left(...x_i, y_i, z_i, ..., \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, ..., t\right) = 0, \quad (\beta = 1, 2, ..., \ell) \qquad \textbf{(4.73)}$$

وعندئذٍ نشتق (4.72) اشتقاقاً كلياً بالنسبة للزمن فنجد:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \ddot{z}_i + \phi\left(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{z}_i, \dot{z}_i, t\right) \qquad \textbf{(4.74)}$$

مع العلم أن ϕ لايحوي المشتقات من المرتبة الثانية بالنسبة للإحداثيات.

نشتق (4.73) بالطريقة نفسها فنجد:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f\ddot{x}_i + \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z_i} \ddot{z}_i + \psi(x_i, y_i, z_i, ..., \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, ...t) = 0 \qquad \textbf{(4.75)}$$

حيث لايحوي التابع ψ أي مشتقات من المرتبة الثانية شأنه في ذلك شأن التابع ϕ، أي أ ن كلاً منهما لايحوي التسارعات.

نفاضل كلاً من (4.74) و (4.75) تفاضلاً غوصياً فنجد:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \delta\ddot{x}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \delta\ddot{y}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \delta\ddot{z}_i \right] = 0 \qquad \textbf{(4.76)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\varphi_\beta}{\partial x_i} \delta\ddot{x}_i + \frac{\varphi_\beta}{\partial y_i} \delta\ddot{y}_i + \frac{\varphi_\beta}{\partial z_i} \delta\ddot{z}_i \right] = 0 \qquad \textbf{(4.77)}$$

ثم نضرب كلاً من (4.76) و (4.77) بالمضاريب λ_α و μ_β على الترتيب (مضاريب لاغرانج) ونجمعهما مع (4.74) فنجد المعادلة التالية:

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[\left(X_i - m_i \ddot{x}_i\right) + \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + \sum_{\beta=1}^{\ell}\mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_i}\right]\delta \ddot{x}_i + \left[\left(Y_i - m_i \ddot{y}_i\right) + \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} + \sum_{\beta=1}^{\ell}\mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i}\right]\delta \ddot{y}_i + \left[\left(Z_i - m_i \ddot{z}_i\right) + \sum_{\alpha=1}^{i}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} + \sum_{\beta=1}^{\ell}\mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z_i}\right]\delta \ddot{z}_i\right\} = 0 \quad \mathbf{(4.78)}$$

وهي عبارة عن 3N معترضة تحوي $3N + k + \ell$ مجهولاً هي إحداثيات جسيمات الجملة (x_i, y_i, z_i) وعدداً من مضاريب لاغرانج λ_α وعدداً آخر ℓ من المضاريب μ_β. نعين من $(k + \ell)$ معترضة منها، بمساواتها الصفر، المجاهيل λ_α و μ_β. ويبقى عندئذٍ $3N - (k + \ell)$ معترضة يمكن أن تساوي الصفر بسبب استقلالية الانتقالات الباقية في فضاء التسارعات.

وهكذا تكون لدينا $[3N - (k + \ell)]$ معترضة بالإضافة $(k + \ell)$ أخرى ويكون المجموع $3N - (k + \ell) + (k + \ell) = 3N$ معترضة تساوي الصفر. نضيف لها عدداً k من معادلات الارتباط الهولونومية وعدداً آخر ℓ من الارتباطات اللاهولونومية فنحصل أخيراً على $3N + k + \ell$ معادلة كافية لحساب $3N + k + \ell$ مجهولاً هي $(k + \ell)$ من مضاريب لاغرانج λ_α و μ_β و N3 احداثي الجسيمات الباقية وهي المعادلات نفسها التي رأيناها في الفصل الأول (معادلات لاغرانج النوع الأول).

35- مبدأ التقوس الأصغر (مبدأ هرتز):

لتكن جملة مادية مؤلفة من N جسيم خاضعة لارتباطات هولونومية فقط وما من قوى فعالة تؤثر فيها ولهذا ستكون طاقتها الكلية ثابتة، ولما كان تابع الجهد ثابتاً أيضاً في هذه الحالة فالطاقة الحركية تبقى ثابتة وتعطى بالعلاقة:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i . v_i^2 \qquad \mathbf{(4.79)}$$

لنفرض إحداثيات جديدة $\vec{\rho}_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ بدلاً من $\vec{r}_i(x_i,y_i,z_i)$ طبقاً للعلاقة:

$$\vec{\rho}_i = \sqrt{\frac{m_i}{m}}\,\vec{r}_i \Rightarrow \xi_i = \sqrt{\frac{m_i}{m}}x_i \quad \eta_i = \sqrt{\frac{m_i}{m}}y_i, \quad \zeta_i = \sqrt{\frac{m_i}{m}}z_i \qquad \textbf{(4.80)}$$

حيث m هي الكتلة الكلية لجملة الجسيمات $(m = \sum m_i)$ ولنشكل فضاءاً اقليدياً E_{3N} عناصره هي الإحداثيات الجديدة للجسيمات $(\xi_1,\eta_1,\zeta_1....\xi_N,\eta_N,\zeta_N)$. ان وضع الجملة المادية في هذا الفضاء يتحدد بنقطة واحدة M وإذا تحركت جملة الجسيمات فإن M ترسم مساراً في الفضاء E_{3N} تمثل كل نقطة فيه وضع الجسيمات في لحظة ما. إن طول قوس المسار في هذا الفضاء يساوي:

$$\overline{d\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{N}\overline{d\rho_i}^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\overline{d\xi_i}^2 + \overline{d\eta_i}^2 + \overline{d\zeta_i}^2\right) \qquad \textbf{(4.81)}$$

وبتقسيم الطرفين على $\overline{d\sigma}^2$ نجد:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\overline{d\rho_i}^2}{\overline{d\sigma}^2} = 1 \qquad \textbf{(4.82)}$$

وبالاشتقاق بالنسبة إلى σ:

$$2\sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{\rho}_i}{d\sigma}.\frac{d^2\vec{\rho}_i}{d\overline{\sigma}^2} = 0 \qquad \textbf{(4.83)}$$

أي أن الجداء العددي للمتجهين $\overrightarrow{\frac{d\rho_i}{d\sigma}}$ و $\overrightarrow{\frac{d^2\rho_i}{\overline{d\sigma}^2}}$ يساوي الصفر وبالتالي فهما متعامدان في الفضاء E_{3N} وبما أن $\frac{d\vec{\rho}}{d\sigma}$ هو متجه المماس فإن $\frac{d^2\rho}{\overline{d\sigma}^2}$ هو متجه الناظم الأساسي مع العلم أن طويلته تساوي التقوس $K = \frac{1}{R}$ حيث R نصف قطر التقوس أي أن:

$$K^2 = \frac{1}{R^2} = \sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{d^2\xi_i}{\overline{d\rho}^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\eta_i}{\overline{d\sigma}^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\zeta_i}{\overline{d\sigma}^2}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d^2\rho_i}{\overline{d\sigma}^2}\right)^2 \quad \textbf{(4.84)}$$

صاغ هرتز مبدأه اعتماداً على العلاقة السابقة وبشكل مشابه لمبدأ نيوتن الأول حيث أكد أن الجملة المادية التي طاقتها الحركية ثابتة تحافظ على وضعها السكوني أو أنها تتحرك بحركة مستقيمة منتظمة نرمز لسرعتها $\vec{v}$ في الفضاء E_{3N} وبالتالي يكون تقوس مسارها أصغرياً (نصف قطر التقوس في هذه الحالة في الفضاء المذكور يساوي اللانهاية فالتقوس أصغري ويساوي الصفر).

والجدير بالذكر أن عبارة الطاقة الحركية (4.79) تتضمن صحة المبدأ لأنها تتضمن ثبات هذه الطاقة وللتأكد من ذلك نقسم طرفي (4.81) على $\overline{dt}^2$ فنجد:

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = v^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{\overline{d\rho_i}^2}{\overline{dt}^2} \quad \textbf{(4.85)}$$

ومن جهة ثانية لدينا من (4.79):

$$\frac{2T}{m} = \sum\frac{m_i}{m}v_i^2 = \sum\left(\frac{\overline{d\rho_i}^2}{dt}\right)^2 = v^2 = \text{Const.} \quad \textbf{(4.86)}$$

أي أن مربع سرعة النقطة M، الممثلة لوضع الجملة في اللحظة t، يساوي ضعف الطاقة الحركية مقسوماً على الكتلة الكلية للجملة.

ماهي العلاقة بين مبدأ غوص ومبدأ هرتز؟

يوضع القسر في حالة انعدام القوى الفعالة كمايلي:

$$ZW = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{r}_i^2 \quad \textbf{(4.87)}$$

ومنه:

$$\frac{ZW}{m} = \frac{1}{2}\sum\left(\frac{d^2\vec{\rho}_i}{dt^2}\right)^2 \quad \textbf{(4.88)}$$

نقسم طرفي العلاقة (4.88) على $v^4=\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^4$ فنجد: طبقاً لـــ (4.84):

$$\frac{ZW}{mv^4}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(\frac{d^2\rho_i}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^4}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}\left(\frac{d^2\rho_i}{d\sigma^2}\right)^2=\frac{1}{2}K^2 \qquad \textbf{(4.89)}$$

أي أن:

$$ZW=\frac{1}{2}mv^4K^2 \qquad \textbf{(4.90)}$$

ولما كانت v^4 ثابتة فإننا نجد بتفاضل طرفي (4.90) تفاضلاً غوصياً:

$$\delta ZW=\frac{1}{2}mv^4\delta K^2=0 \qquad \textbf{(4.91)}$$

وبالتالي يكون مبدأ هرتز حالة خاصة من مبدأ غوص.

36- مبدأ جوردن:

ينص مبدأ جوردن على مايلي:

تجري حركة جملة مادية بحيث يكون مجموع الأعمال الافتراضية الجزئية للقوة الضائعة $\left(\vec{F_i}-m_i\vec{W_i}\right)$ في فضاء السرع $\vec{v_i}$، يساوي الصفر، وبالتالي يصاغ المبدأ رياضياً بالمعادلة:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F_i}-m_1\vec{Wi}\right).\delta\vec{v_i}=0 \qquad \textbf{(4.92)}$$

مع العلم أن التفاضل طبقاً لهذا المبدأ يحقق العلاقات:

$$\delta\vec{r_i}=\delta\vec{\ddot{r}_i}=\delta\vec{W_i}=\delta\vec{F_i}=0,\quad \delta\vec{\dot{r}_i}=\delta\vec{v_i}\neq 0 \qquad \textbf{(4.93)}$$

لنتساءل في نهاية هذا الفصل: هل يوجد قاسم مشترك بين المبادىء التي رأيناها في الميكانيك التحليلي؟

من السهل أن نلاحظ أنه يمكن الحصول على مبدأ الانتقالات الافتراضية (معادلة المبير – لاغرانج) ومبدأ جوردن ومبدأ غوص باستخدام طريقة تفاضل

لكل منها؛ في الأول؛ الذي تعرفنا عليه في الفصل الثاني، يتم التفاضل طبقاً للشروط:

$$\delta \vec{F}_i = \delta \vec{W}_i = \delta \overset{\bullet\bullet}{\vec{r}_i} = \delta \vec{v}_i = 0 \ , \ \delta \vec{r}_i \neq 0 \qquad \textbf{(4.94)}$$

وعندئذٍ إذا فاضلنا المعادلة التالية (طبقاً للشروط 4.94):

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{W}_i \right) . \vec{r}_i = 0 \qquad \textbf{(4.95)}$$

نحصل على مبدأ الانتقالات الافتراضية التالي:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{W}_i \right) . \delta \vec{r}_i = 0 \qquad \textbf{(4.96)}$$

أما إذا فاضلنا المعادلة:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{W}_i \right) . \vec{v}_i = 0 \qquad \textbf{(4.97)}$$

ضمن الشروط (4.93) نحصل على مبدأ جوردن.

وأخيراً إذا فاضلنا المعادلة:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{W}_i \right) . \overset{\bullet\bullet}{\vec{r}_i} = 0 \qquad \textbf{(4.98)}$$

ضمن الشروط:

$$\delta \vec{F}_i = \delta \vec{r}_i = \delta \overset{\bullet}{\vec{r}_i} = 0 \ , \ \delta \overset{\bullet\bullet}{\vec{r}_i} = 0 \qquad \textbf{(4.99)}$$

فإننا نحصل على مبدأ غوص التالي:

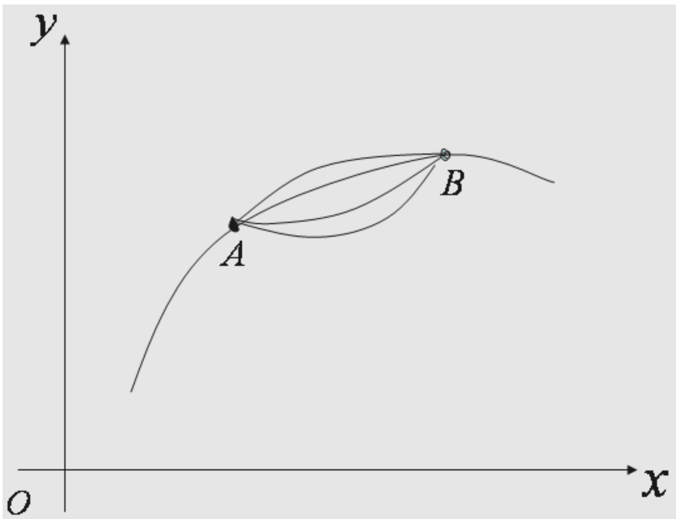
$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{W}_i \right) . \delta \overset{\bullet\bullet}{\vec{r}_i} = 0$$

ونلاحظ أن القوة الضائعة $F_i - m_i . W_i$ هي العامل المشترك بين المبادىء الثلاثة؛ في الأول ينعدم عملها في فضاء الإحداثيات وفي الثاني ينعدم عملها في فضاء السرع وفي الثالث ينعدم عملها في فضاء التسارعات.

37- الخطوط الجيوديزية:

أ- ترتبط الخطوط الجيوديزية ارتباطاً وثيقاً بمبدأ التغيرات لذلك كان من الضروري التعرف عليها في هذا الفصل لاسيما إذا علمنا أن لها تطبيقات كثيرة في العلوم الجغرافية والهندسية.

من المعلوم أنه يمكن رسم عدد لانهائي من المنحنيات تصل بين نقطتين A و B من سطح فراغي $\phi(x,y,z,t)$. وسنبحث في هذه الفقرة عن أقصر الطرق، ولكننا سنحل هذه المسألة أولاً بفرض أن النقطتين $B(x_2,y_2)\,,A(x_1,y_1)$ واقعتان في مستوي xoy (شكل 4.6) وسنبحث عن معادلة المنحني $y=f(x)$ بحيث يكون التكامل المنحني التالي:



الشكل (4.6)

$$J=\int_A^B f(y,y',x)dx \qquad \textbf{(4.101)}$$

أصغرياً علماً أن $y'=\dfrac{dy}{dx}$ وهذا يكافىء للشرط $\delta J=0$.

لحل هذه المسألة نميز المنحنيات بين A و B بوسيط α، كما فعلنا عند استنتاج مبدأ الفعل الأصغر، طبقاً للمعادلة:

$$y(x,\alpha)=y(x,0)+\alpha\eta(x) \qquad \textbf{(4.102)}$$

حيث $\alpha = 0$ يوافق المنحني المطلوب أما $\eta(x)$ فهي دالة تضمن التقاء جميع المنحنيات في A و B لأنها تتعدم فيهما. وعندئذٍ نضع التكامل (4.101) بالصيغة التالية:

$$J(\alpha) = \int_A^B f\left[(y, x, \alpha), y'(x, \alpha), x\right] dx \qquad \textbf{(4.103)}$$

ثم نفاضل بالنسبة إلى α ونضع $\delta J(\alpha)$:

$$\delta J(\alpha) = \int_A^B \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \delta\alpha \right) dx = 0 \qquad \textbf{(4.104)}$$

نستكمل الحد الثاني بالتجزئة فنجد:

$$= \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \Big|_A^B - \int_A^B \delta y \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} dx \quad \int_A^B \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \delta\alpha dx = \int_A^B \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y dx \quad \textbf{(4.105)}$$

نبدل في (4.104)، بعد ملاحظة انعدام الحد الأول، فنجد:

$$\delta J(\alpha) = \int_A^B \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right) dx = 0$$

ولكي ينعدم هذا التكامل دوماً يجب أن ينعدم المستكمل:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y = 0$$

ولكي يتحقق ذلك مهما كان δy يجب أن تتحقق المعادلة:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{(4.106)}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى يجب أن تحققها الدالة f التي تمثل المنحني المطلوب (الجيوديزي)، وأن حل هذه المعادلة يقود إ لى حساب هذه الدالة.

غني عن البيان أن مبدأ الفعل الأصغر الذي رأيناه في بداية هذه الفصل يدخل ضمن اطار حساب النهايات لدالة الفعل S، ويمكن الحصول على معادلات لاغرانج من هنا مباشرةً إذا استبدلنا الدالة $f(y, y', x)$ بدالة لاغرانج $L(q, \dot{q}, t)$ واستكملنا بالزمن طبقاً للشروط السابقة.

ب- من المعلوم في الهندسة المستوية أن أقصر بعد بين نقطتين هو الخط المستقيم الواصل بينهما. فهل يمكن التأكد من ذلك على ضوء هذه الفقرة؟

إن طول قوس المنحني المرسوم على مستوي هو:

$$\overline{d\ell}^2 = \overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 = (1 + y'^2)\overline{dx}^2$$

ومنه:

$$d\ell = \sqrt{(1 + y'^2)}dx \qquad \textbf{(4.107)}$$

أي أن:

$$\ell = \int \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

فإذا قارنا (4.107) مع (4.101) نجد أن الدالة f التي يجب أن تحقق المعادلة (4.106) هي:

$$f = \sqrt{1 + y'^2}$$

نشكل المعادلة التي تحققها f فنجد أولاً:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

ومنه المعادلة المطلوبة:

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 - y'^2}} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \qquad \textbf{(4.108)}$$

ومن هذه المعادلة نحسب y' فنجد:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} = a$$

ومنه نحصل على معادلة المنحني:

$$y = ax + b \qquad \textbf{(4.109)}$$

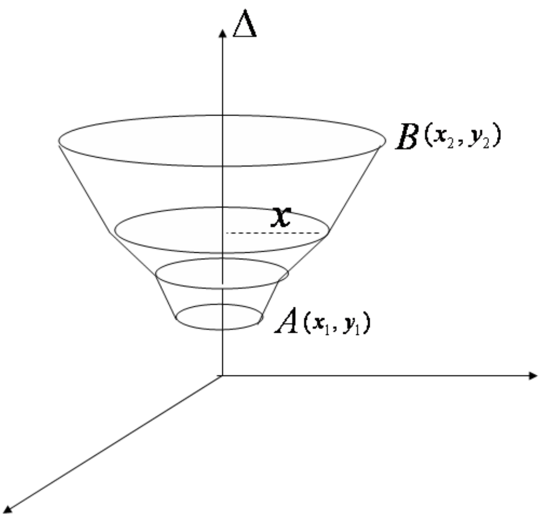
وهي معادلة مستقيم وبالتالي فالمستقيم الواصل بين نقطتين A و B من مستوي هو أقصر طريق بينهما، وهي بديهة معروفة في الهندسة المستوية؛ أي أن المستقيم هو خط جيوديزي في المستوي. والجدير بالذكر أن الثابتين a و b يتعينان من وجوب مرور المستقيم في النقطتين المعلومتين $A(x_1, y_1)$ و

$B(x_2, y_2)$. وبالطريقة نفسها نبرهن أن الخطوط الجيوديزية على كرة هي الدوائر العظمى المرسومة على هذه الكرة.

ج- السليسلة:

سندرس في هذا النبد مثالاً هاماً على الخطوط الجيوديزية والسطوح الجيوديزية يهتم به صانعو السفن والطائرات والصواريخ وكل مايتحرك في وسط مقاوم؛ فنبحث عن أصغر مساحة لسطح دوراني ناتج عن دوران منحني حول محور ما. غني عن البيان أن قوة المقاومة تتناسب طرداً مع مساحة السطح وأن أصغر مقاومة تقابل أصغر مساحة.

نحسب أولاً طول قوس المنحني بالاستفادة من (4.107) ثم نحسب مساحة السطح الناتج عن عنصر القوس $d\ell$ (شكل 4.7) فنجد:



الشكل (4.7)

$$ds = 2\pi x d\ell = 2\pi x\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

أما المساحة الناتجة عن دوران القطعة AB من المنحني فتساوي:

$$S = \int_A^B 2\pi x\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad \textbf{(4.110)}$$

أي أنه طبقاً لـــ (4.101) تكون الدالة f هي التالية:

$$f(y, y') = x\sqrt{1+y'^2} \qquad \textbf{(4.111)}$$

تشكل المعادلة (4.106) ولهذا نشتق f:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \,, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

وهكذا نحصل على المعادلة:

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = a$$

ومنه:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

وبالاستكمال نجد:

$$y = a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = a \text{ arc ch}\frac{x}{a} + b$$

ومنه معادلة المنحني المطلوب:

$$x = a \text{ ch}\frac{y - b}{a} \qquad \textbf{(4.112)}$$

وهي معادلة منحني يسمى السليسلة (catenary).

يتعين الثابتان a و b من وجوب تحقيق المعادلة (4.112) لإحداثيات النقطتين A و B وهذا يعطي معادلتين لحسابهما.

البراشيستوشرون أو المنحني الأقصر زمنا ، (الأقزن) (Brachistochron)

ماهو المنحني الذي إذا سقطت عليه نقطة مادية تحت تأثير ثقلها فقط (حلقة ثقيلة مثلاً) فإنها تستغرق أقل زمن ممكن لقطع قوس AB منه؟ لقد حل برنولي هذه المسألة وأطلق على المنحني اسم براشيستوشرون ويبدو أن التسمية مشتقة من كلمتين في اللغة اليونانية هما "براخيستوس" التي تعني الأقصر (الأقل) و"خرونوس" التي تعني زمن وبالتالي يمكن أن نسمي المنحني المذكور بالعربية "المنحني الأقصر زمناً" وقد رأيت أن أنحت من هذه الكلمات الثلاث كلمة واحدة هي "الأقزن" الذي سنبحث عن معادلته. ولكن قبل ذلك سنبرهن أن

المعادلة (4.106) تقبل تكاملاً أولياً مباشراً عندما لايتعلق التابع f بالمتحول x بشكل صريح. ولهذا نضرب طرفيها بـــ y' فنجد:

$$y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

أو بإضافة وطرح $y''\frac{\partial f}{\partial y'}$ إلى هذه المعادلة:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y'\right) - \left(y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 \qquad \textbf{(4.113a)}$$

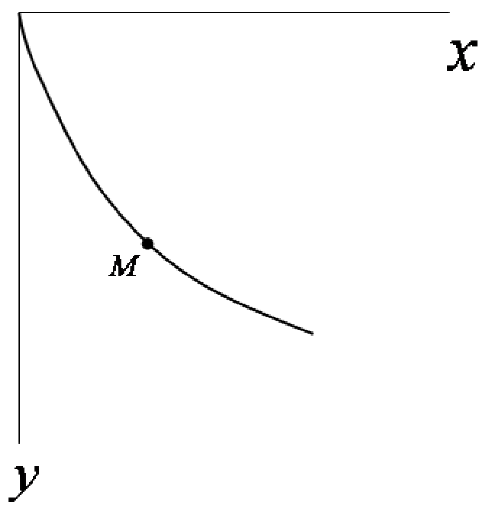
فإذا لم يتبع f المتحول x بشكل صريح فيمكن التأكد أن القوس الثاني هو المشتق الكلي للدالة $f[y(x), y'(x)]$ بالنسبة للمتحول x. وعندئذٍ إذا دمجنا القوسين مع بعضهما نحصل على العلاقة:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y' - f\right) = 0 \qquad \textbf{(4.113b)}$$

ومنه التكامل المطلوب:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}y' - f = \text{Const.} \qquad \textbf{(4.114)}$$

ننتقل الآن إلى معالجة مسألة الأقزن، فنفرض منحنياً Γ نسقط عليه نقطة ثقيلة M دون احتكاك (شكل 4.8).



الشكل (4.8)

إن الزمن اللازم لقطع قوس عنصري $d\ell$ هو:

$$dt = \frac{d\ell}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

والزمن اللازم لقطع قوس AB:

$$t = \int \frac{d\ell}{v} = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

وبالتالي يمكن أن نأخذ الدالة f كمايلي:

$$f(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

وهي لاتحوي x، وهكذا يمكننا الاستفادة من التكامل (4.114) الذي يساوي:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}y' - f = \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} = Const.$$

ومنه:

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = a \Rightarrow y(1+y'^2) = C$$

وبحساب 'y من هذه العلاقة نجد:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C-y}{y}} \qquad \textbf{(4.115)}$$

لحل هذه المعادلة التفاضلية نغير المتحول فنفرض:

$$y = C\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{C}{2}(1-\cos\varphi)$$

وعندئذٍ نجد بالتبديل في (4.115):

$$\frac{dy}{dx} = ctg\frac{\varphi}{2}$$

ومنه:

$$dx = \frac{dy}{ctg\frac{\varphi}{2}} = \frac{C\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi}{ctg\frac{\varphi}{2}} = C\sin^2\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

وبالاستكمال نجد:

$$x = \frac{C}{2}\int(1-\cos\varphi)d\varphi = \frac{C}{2}(\varphi - \sin\varphi) + C_1$$

وباختيار شروط ابتدائية مناسبة تجعل $C_1 = 0$ نجد أخيراً معادلة الأقزن الوسيطية التالية:

$$x = \frac{C}{2}(\varphi - \sin\varphi), \quad y = \frac{C}{2}(1-\cos\varphi) \qquad \textbf{(4.116)}$$

وهي معادلة سيكلوئيد، وهو، كما نعلم، المحل الهندسي لنقطة من دائرة تتدحرج على المستوي الأفقي.

نعمم المسألة السابقة؛ فنبحث عن المنحني الفراغي الذي اذا سقط عليه جسيم دون احتكاك تحت تأثير قوة $\vec{F}$ تشتق من كمون $V(x,y,z)$ فإنها تستغرق أقل زمن ممكن.

من السهل حساب السرعة في هذه الحالة من قانون مصونية الطاقة حيث نجد:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x,y,z)]}$$

إن طول قوس عنصري في هذه الحالة هو:

$$d\ell = \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 + \overline{dz}^2} = \sqrt{1 + y_x'^2 + z_x'^2}\,dx$$

أما الزمن اللازم لقطع القوس AB فهو:

$$t = \int\frac{d\ell}{v} = \sqrt{\frac{1 + y_x'^2 + z_x'^2}{\frac{2}{m}[E - V(x,y,z)]}}dx \qquad \textbf{(4.117)}$$

وبالتالي يمكن أن نأخذ الدالة f بالصيغة التالية:

$$f(y,y',z,z',x) = \sqrt{\frac{1 + y_x'^2 + z_x'^2}{[E - V(x,y,z)]}} \qquad \textbf{(4.118)}$$

ولإكمال حل هذه المسألة لابد من معرفة دالة الجهد V التي تشتق منها القوة $\vec{F}$ المؤثرة على الجسيم.

وهكذا تؤول المسألة لحساب القيمة الصغرى للتكامل (4.117) وسنحصل عندئذٍ على معادلتين لحساب الدالتين y(x) و z(x) شبيهتين بمعادلات لاغرانج أو المعادلة (4.106) ولكن المتحول هنا هو x بدلاً من t.

الفصل الخامس

حركة جسيم مشحون في حقل كهرطيسي
مدخل إلى نظرية الاضطراب التقليدية

تعتبر دراسة الشحنات الكهربائية والحقول الكهرطيسية الناتجة عنها من مواضيع التحريك الكهربائي (Electrodynamics) لكن حركات الجسيمات ضمن الحقول السابقة هي مواضيع تخص الميكانيك، ولذلك خصصنا الفصل الخامس لدراسة هذه الحركات كتطبيق على قوانين الميكانيك التحليلي.

38- تابع لاغرانج لجسيم يتحرك في حقل كهرطيسي:

من المعلوم أن تابع لاغرانج $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ للجمل المحافظة يحقق الخاصتين التاليتين:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = P_j \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = F_j \qquad \textbf{(5.1)}$$

حيث q_j، $\dot{q}_j$ هما الاحداثيات المعممة والسرع المعممة على الترتيب.

وسنبحث،على ضوء ذلك،عن تابع لاغرانج لجسيم شحنته q يتحرك بسرعة $\vec{v}$ في حقل كهرطيسي وتؤثر عليه قوةلورنتز التالية(في الجملة السغثية):

$$\vec{F} = q\left[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B})\right] \qquad \textbf{(5.2)}$$

حيث $\vec{E}$ هو الحقل الكهربائي و $\vec{B}$ هو الحقل المغناطيسي، وكلا الحقلين يشتقان من كمونين طبقاً للعلاقتين:

$$\vec{E} = -\text{grad}\ \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \text{rot}\ A \qquad \textbf{(5.3)}$$

فهل يحقق تابع لاغرانج التالي:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + \frac{q}{c}(\vec{A}\,.\,\vec{v}) \qquad \textbf{(5.4a)}$$

الخاصتين (5.3)؟

للإجابة عن هذا السؤال نشتق L بعد وضعه بالصيغة:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}} - q\varphi(x,y,z) + \frac{q}{c}(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z})$$

(5.4b)

نشتق أولاً بالنسبة إلى $\dot{x}$ فنجد:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}A_x \qquad \textbf{(5.5)}$$

وبالطريقة نفسها نحسب $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$. فإذا اعتبرنا أن $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ هو متجه مركباته $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$ فإننا نجد كتعميم لــ (5.5):

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}\vec{A} = \vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A} = \vec{P} \qquad \textbf{(5.6a)}$$

ومنه:

$$\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A} \qquad \textbf{(5.6b)}$$

حيث $\vec{P} = \vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}$ هو مايسمى الاندفاع المعمم تمييزاً له عن الاندفاع العادي $\vec{P}$ في حالة غياب الحقل الكهرطيسي. وهكذا تتحقق الخاصة الأولى من (5.1).

لنحسب مشتق L بالنسبة للاحداثيات المعممة x, y, z ولهذا نعتبر أن $\frac{\partial L}{d\vec{r}}$ هو متجه مركباته $\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}$ فنجد بسهولة:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -q \operatorname{grad} \varphi + \frac{q}{c} \operatorname{grad}(\vec{A} . \vec{v}) \qquad \textbf{(5.7)}$$

وطبقاً لقواعد التحليل الشعاعي يكون:

$$(A\nabla)\vec{v} + (v\nabla)\vec{A} + \vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{v} + \vec{v} \times \operatorname{rot} A \operatorname{grad}(\vec{A} . \vec{v}) = \nabla(\vec{A} . \vec{v}) = \qquad \textbf{(5.8)}$$

وبما أن $\nabla = \operatorname{grad}$ تؤثر في فضاء الاحداثيات ولاتؤثر في فضاء السرع فيمكن وضع العلاقة السابقة كمايلي:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -q \operatorname{grad} \varphi + (\vec{v} . \operatorname{grad})\vec{A} + \vec{v} \times \vec{B} \qquad \textbf{(5.9)}$$

فإذا علمنا أن (راجع مواضيع التحليل الشعاعي):

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{dx}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} . \operatorname{grad})\vec{A} \qquad \textbf{(5.10)}$$

وبدلنا $(\vec{v} . \operatorname{grad})A$ بقيمتها في (5.9) نحصل على المشتق المطلوب:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -q \operatorname{grad} \varphi + \frac{q}{c}\left(\frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}(\vec{v} \times \vec{B}) = \qquad \textbf{(5.11)}$$

$$= q\left[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B})\right] + \frac{q}{c}\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{F} + \frac{q}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}$$

إن وجود الحد الأخير لايسبب أي مشكلة لأن تابع لاغرانج يعطى بالتقريب إلى المشتق الكلي لأي تابع للزمن (راجع الفصل الرابع).

وهكذا نرى أن مشتق تابع لاغرانج المعرف بالعلاقة (5.4a) يحقق الخاصتين (5.1) وبالتالي يمكن عده التابع المطلوب.

كيف يصبح هذا التابع في التقريب الكلاسيكي عندما $v << c$؟ للاجابة عن هذا السؤال ننشر L بقوى $\left(\frac{v}{c}\right)$ فنجد:

$$L=-mc^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}+\frac{q}{c}\left(\vec{A}.\vec{v}\right)-q\varphi=\frac{mv^2}{2}-q\varphi+\frac{q}{c}\left(\vec{A}.\vec{v}\right)\quad \textbf{(5.12)}$$

وذلك باهمال الثابت $-mC^2$ الذي لايؤثر على صيغة معادلات لاغرانج.

39- تابع هاملتون لجسيم يتحرك في حقل كهرطيسي:

من المعلوم (راجع الفصل الثالث) أن دالة هاملتون تعطى بالعلاقة:

$$H=\sum P_j\dot{q}_j-L(q_j,\dot{q}_j,t)$$

وفي حالتنا هذه لدينا جسيم واحد سرعته $\vec{v}$ وبالتالي يكون:

$$H=\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\vec{v}-L=\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{q}{c}A\right).\vec{v}+mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+q\varphi-\frac{q}{c}(\vec{A}.\vec{v})$$

$$=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+q\varphi\qquad \textbf{(5.13a)}$$

ولابد من رد H إلى شكله النظامي كي يمكن الاستفادة منه في حل المسائل ولهذا نربع العلاقتين (5.6b) و (5.13b) فنجد:

$$(H-q\varphi)^2=\frac{m^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}},\qquad \frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}=(P-\frac{q}{c}A)^2\qquad \textbf{(5.14)}$$

نضع الثانية بالشكل:

$$\frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}+m^2c^2-m^2c^2=\frac{m^2v^2+m^2c^2-m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}-m^2c^2\quad \textbf{(5.15)}$$

ومن (5.14) و (5.15) نجد:

$$\frac{m^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}-m^2c^2=\left(P-\frac{q}{c}A\right)^2$$

أي أنه، بعد الاستفادة من العلاقة الأولى من (5.14) يمكن وضع العلاقة الأخيرة كمايلي:

$$\frac{(H-q\varphi)^2}{c^2}-m^2c^2=\left(P-\frac{q}{c}A\right)^2$$

ومنه نحصل على تابع هاملتون بشكله النظامي التالي:

$$\textbf{(5.13b)}\ H=\sqrt{m^2c^4+\left(P-\frac{q}{c}A\right)^2c^2}+q\varphi$$

في التقريب الكلاسيكي حيث تكون سرعة الجسيم أقل بكثير من سرعة الضوء يمكن نشر الجذر حيث نجد:

$$H=mc^2\sqrt{1+\frac{\left(P-\frac{q}{c}A\right)^2}{m^2c^2}}+q\varphi=mc^2\left[1+\frac{1}{2m^2c^2}\left(p-\frac{q}{c}A\right)\right]+q\varphi$$

$$=mc^2+\frac{\left(P-\frac{q}{c}A\right)^2}{2m}+q\varphi\ \textbf{(5.16)}$$

ويمكن إهمال الحد الأول الثابت عندما تشكل معادلات هاملتون.

40- معادلات الحركة في النظرية النسبية:

رأينا أنه من المفيد، قبل دراسة حركة جسيم في حقل كهرطيسي، أن نذكر بمعادلات الحركة التي توضع في الفضاء الرباعي كمايلي:

$$\frac{dP_\alpha}{dt}=\frac{d}{dt_0}mu_\alpha=F_\alpha\quad(\alpha=1,2,3,4)\qquad\textbf{(5.17)}$$

مع العلم أن m هي كتلة السكون للجسيم و dt_0هي عنصر الزمن الخاص، أما u_α فهي السرعة في الفضاء الرباعي (x,y,z,τ) ومركباتها هي:

$$u_x=\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad u_y=\frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad u_z=\frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad u_\tau=\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad\textbf{(5.18)}$$

و $\vec{v}$ هي سرعة الجسيم في الفضاء الثلاثي.

وعندئذٍ توضع معادلات الحركة (5.17) كمايلي: (على المحور ox).

$$\frac{dP_x}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_x \quad \textbf{(5.19a)}$$

حيث F_x هي مركبة القوة على ox في الفضاء الرباعي.

لكن ننتقل إلى التقريب الكلاسيكي نضع (a5.19) بالصيغة التالية:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \textbf{(5.19b)}$$

فإذا فرضنا:

$$\mathbf{F}_x = F_x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

يمكن أن تتحول F_x إلى $\mathbf{F}_x$ عندما $v << c$ وعندئذٍ نضع (b5.19).

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{F}_x \quad \textbf{(5.19c)}$$

وتتحول عندئذٍ (5.19c) إلى مسقط معادلة الحركة على المحور ox في الميكانيك التقليدي.

وكذلك نجد بالتعميم على المحاور الباقية.

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{F}_y, \frac{d}{dt}\frac{mv_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{F}_z, \frac{d}{dt}\frac{icm}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_\tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \textbf{(5.20)}$$

ولايوجد في الفضاء الثلاثي مايقابل المركبة الزمنية لأنها عقدية، لكنها ترتبط بالاستطاعة ولبرهان ذلك نضرب معادلات الحركة (5.18) بـ u_α ونجمع بـ α فنجد:

$$\sum_\alpha u_\alpha \frac{dmu_\alpha}{dt_0} = \sum_\alpha F_\alpha . u_\alpha = F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z + F_\tau u_\tau = 0 \quad \textbf{(5.21a)}$$

لأن السرعة والتسارع (وبالتالي السرعة والقوة) متعامدان في الفراغ الرباعي، كما نعلم. وعندئذٍ نجد من المعادلة السابقة أن:

$$\frac{\mathbf{F}_x u_x}{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{\mathbf{F}_y v_y}{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{\mathbf{F}_z v_z}{1-\frac{v^2}{c^2}}+F_\tau \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=0 \quad \textbf{(5.21b)}$$

ان الحدود الثلاثة الأولى هي الجداء العددي $\vec{F}.\vec{v}$ وبالتالي يكون:

$$F_\tau=\frac{i}{c}\frac{(\vec{\mathbf{F}}.\vec{v})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \textbf{(5.22)}$$

فإذا بدلنا F_τ بقيمتها من (5.22) في المعادلة الأخيرة من (5.20) نحصل على العلاقة:

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\left(\vec{\mathbf{F}}.\vec{v}\right)=\frac{dA}{dt} \quad \textbf{(5.23)}$$

حيث $\frac{dA}{dt}$ هو العمل المنجز في واحدة الزمن (الاستطاعة).

ومن المعلوم في الميكانيك التقليدي أن مشتق الطاقة الحركية، الذي سنرمز له E، يساوي الاستطاعة وبالتالي من الطبيعي أن نفرض:

$$E=E_{kin}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=m(v)c^2 \qquad \textbf{(5.24)}$$

وهي معادلة إينشتاين المعروفة لحساب طاقة جسيم كتلته السكونية m ويتحرك بسرعة $\vec{v}$.

من المفيد في نهاية هذه الفقرة أن نستنتج العلاقة (5.24) بين الطاقة (E) وكمية الحركة $\vec{P}$ ولهذا نجد من المعادلات الثلاث الأولى من (5.18) بعد

ضرب الطرفين بكتلة السكون m نحصل على كمية الحركة $\vec{P}$ في الفراغ الثلاثي:

$$\vec{P}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \textbf{(5.25)}$$

وبحذف $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ من (5.24) و (5.25) نجد أخيراً العلاقة الهامة التالية:

$$\vec{P}=\frac{E}{c^2}\vec{v} \qquad \textbf{(5.26)}$$

41- حركة جسيم مشحون في حقل كهربائي:

من السهل الآن، على ضوء الفقرة السابقة، أن نكتب معادلة حركة الجسيم بفرض أن الحقل $\vec{\varepsilon}$ يتجه باتجاه المحور ox حيث نجد طبقاً لـــ (5.20) و (5.23) (باهمال $\frac{v^2}{c^2}$):

$$\frac{dP_x}{dt}=\frac{dmv_x}{dt}=F_x,\ \frac{dP_y}{dt}=F_y,\ \frac{dP_z}{dt}=F_z,\ \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{dE}{dt}=\vec{F}.\vec{v} \qquad \textbf{(5.27)}$$

مع العلم أن $\vec{F}=q\vec{\varepsilon}$ وبالتالي يكون: $F_x=q\varepsilon_x,\ F_y=F_z=0$ ومن الأخيرة نجد:

$$\frac{dE}{dt}=\vec{\mathbf{F}}.\vec{v}=\mathbf{F}_x v_x+\mathbf{F}_y v_y+\mathbf{F}_z v_z=q\varepsilon_x\frac{dx}{dt} \qquad \textbf{(5.28)}$$

لايجاد قانون الحركة ومعادلة المسار نستكمل المعادلات السابقة طبقاً للشروط الابتدائية التالية:

$$t=0,\ x_0=y_0=z_0=0,\ \ P_x=P_z=0,\ P_y=P_0\neq 0 \qquad \textbf{(5.29)}$$

أي أن الحقل $\vec{\varepsilon}$ يتعامد مع اتجاه الاندفاع الإبتدائي $\vec{P_0}$ في بداية الحركة.

فإذا حسبنا E_0 ضمن هذه الشروط نجد:

$$E_0 = \sqrt{P_0^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \textbf{(5.30)}$$

وللحصول على الاندفاع $\vec{P}$ نستكمل المعادلات (5.27) فنجد:

$$P_x = q\varepsilon_x t \,,\, P_y = P_0 \,,\, P_z = 0 \quad \textbf{(5.31)}$$

وبالتالي تحدث الحركة في المستوي xoy.

أما الطاقة فتحسب من (5.28) باستكمالها بالزمن:

$$E = q\varepsilon_x x + E_0 = \sqrt{\left(P_x^2 + P_y^2\right)c^2 + mc^4} =$$

$$= \sqrt{c^2 q^2 \varepsilon_x^2 + P_0^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{q^2 c^2 \varepsilon_x^2 t^2 + E_0^2} \quad \textbf{(5.32)}$$

ومنه نحصل على قانون الحركة التالي:

$$x = \frac{1}{q\varepsilon_x}\left[\sqrt{q^2 c^2 \varepsilon_x^2 t^2 + E_0^2} - E_0\right] \quad \textbf{(5.33)}$$

ويسهل الحصول على معادلة المسار إذا حذفنا الزمن من (5.31) و (5.33) ولهذا نكتب أولاً:

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \div \frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{v_y} = \frac{dx}{dy} = \frac{q\varepsilon_x t}{P_0} \quad \textbf{(5.34)}$$

نبدل t بقيمتها من (5.34) في (5.33) فنجد بعد تربيعها:

$$(q\varepsilon_x x + E_0)^2 = \left(cP_0 \frac{dx}{dy}\right)^2 + E_0^2$$

ومنه:

$$\frac{y}{cP_0} = \int \frac{dx}{\sqrt{(q\varepsilon_x x + E_0)^2 - E_0^2}} = \frac{1}{q\varepsilon_x} \operatorname{arc.ch} \frac{E}{E_0}$$

أو بشكلها النهائي:

$$x = \frac{E_0}{q\varepsilon_x}\left(\operatorname{ch}\frac{q\varepsilon_x y}{cP_0} - 1\right) \; \frac{q\varepsilon_x x}{E} + 1 = \operatorname{ch}\frac{q\varepsilon_x}{cP_0} y \Rightarrow \quad \textbf{(5.35)}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $\frac{q\varepsilon_x}{cP_0}y$ صغيراً (تقريب كلاسيكي لأن c موجودة في مقام الكسر) يمكن نشر جيب التمام القطعي فنجد بعد استبدال E_0 بـــ mc^2 و P_0 بـــ mv_0^2 أن:

$$x = \frac{E_0}{q\varepsilon_x}\left(1 + \frac{q^2\varepsilon_x^2 xy^2}{c^2 p_y^2} - 1\right) = \frac{q\ \ \varepsilon_x}{mv_0^2}y^2 \qquad \textbf{(5.36)}$$

وهي معادلة قطع مكافيء، وهذه نتيجة طبيعية ومنطقية لأن مسار أي جسيم في حقل متجانس ومستقر (حقل الثقالة مثلاً) هو بالفعل قطع مكافيء.

كيف تتغير النتائج السابقة عندما يكون الحقل $\vec{\varepsilon}$ مستقراً (لايتبع الزمن) ولكنه يتبع الإحداثيات؟ ولنفرض أن $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(x)$ وأنه يشتق من كمون $\varphi(x)$. وعندئذٍ نجد من المعادلة الأخيرة من (5.27):

$$= -q\frac{d\varphi}{dx}.\frac{dx}{dt} = -q\frac{d\varphi}{dt}\ \frac{dE}{dt} = \vec{F}.\vec{v} = q\varepsilon_x\frac{dx}{dt} = -q\ \mathrm{grad}\ \varphi\frac{dx}{dt} \qquad \textbf{(5.37)}$$

وبالاستكمال نجد:

$$E + q\varphi = \mathrm{Const.} = E_0 + q\varphi_0 \qquad \textbf{(5.38)}$$

$$\Delta E = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = q(\varphi - \varphi_0) = qV \qquad \textbf{(5.39)}$$

حيث V فرق الكمون بين وضعين تغيرت بينهما الطاقة من E_0 إلى E.

لنحسب السرعة التي يكتسبها الجسيم من العلاقة السابقة (5.39) فنجد أخيراً:

$$v = c\sqrt{\frac{q^2V^2 + 2qmc^2V}{(qV + mc^2)^2}} = \sqrt{\frac{mc^4\left(2qV + \frac{q^2V^2}{mc^2}\right)}{m^2c^4\left(1 + \frac{qV}{mc^2}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2qV}{m} \frac{1+\dfrac{qV}{2mc^2}}{\left(1+\dfrac{qV}{mc^2}\right)^2}} \quad \textbf{(5.40)}$$

ولكي نوضح المعنى الفيزيائي للعلاقة السابقة، التي تعتبر أساس المسرعات الخطية نميز حالتين:

1- الطاقة المكتسبة $\Delta E = qV$ أصغر بكثير من mc^2 وعندئذٍ نجد من (5.40) أن:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \quad \textbf{(5.41)}$$

وهي العلاقة الكلاسيكية المعروفة.

ب- الطاقة المكتسبة أكبر بكثير من mc^2 $(qV >> mc^2)$ وعندئذٍ نجد من (5.40):

$$v \approx \sqrt{\frac{2qV}{m} \frac{\dfrac{qV}{2mc^2}}{\dfrac{q^2}{m^2}\dfrac{V^2}{c^4}}} = \sqrt{\frac{2qV}{m}\frac{mc^2}{2qV}} \approx c \quad \textbf{(5.42)}$$

أي أن سرعة الجسيم ذي الشحنة q المتحرك في حقل كهربائي $\varepsilon(x)$ تزداد زيادة كبيرة.

42- حركة جسيم في حقل مغناطيسي $\vec{B}$:

نفرض أن الحقل $\vec{B}$ متجانس ويتجه باتجاه oz ونكتب معادلات الحركة اعتماداً على (5.2) وعلى (5.20) فنجد:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{dP_x}{dt} = \frac{q}{c}(v \times B)_x = \frac{q}{c}v_y B \quad \textbf{(5.43)}$$

$$\frac{dP_y}{dt} = -\frac{q}{c}v_x B, \quad \frac{dP_z}{dt} = 0, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{q}{c}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right).\vec{v} = 0 \quad \textbf{(5.44)}$$

نلاحظ من المعادلة الأخيرة أن الطاقة E ثابتة $(E = E_0)$ وأن $v_z = (v_z)_0$. وإذا انعدمت مركبة السرعة على oz في بداية الحركة تكون الحركة مستوية وتحدث في المستوي xoy.

بالاستفادة من العلاقة (5.26) بين الطاقة و السرعة يمكن أن نكتب:

$$\frac{dP_x}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{E_0}{c^2}v_x = \frac{q}{c}v_y B \quad \textbf{(5.45)}$$

ومنه:

$$\frac{1}{v_y}\frac{dv_x}{dt} = \frac{qcB}{E_0} \quad \textbf{(5.46)}$$

وكذلك نجد بالطريقة نفسها:

$$\frac{1}{v_x}\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qcB}{E_0} \quad \textbf{(5.47)}$$

وبحل المعادلتين السابقتين حلاً مشتركاً نحصل على المعادلتين:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \frac{q^2c^2B^2}{E_0^2}v_x = 0 \ , \ \frac{d^2v_y}{dt^2} + \frac{q^2c^2B^2}{E_0^2}v_y = 0 \quad \textbf{(5.48)}$$

ومنه نحصل على قانون السرعة التالي:

$$v_x = a\cos(\omega t + \alpha), \ \ v_y = -a\sin(\omega t + \alpha) \quad \textbf{(5.49)}$$

حيث $\omega = \frac{qcB}{E_0}$ هو تواتر الحركة.

ومنه (5.49) نحسب السرعة فنجد:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = a^2 = v_{xy}^2 = Const. \quad \textbf{(5.50)}$$

ولإيجاد قانون الحركة نستكمل المعادلتين (5.49) فنجد أخيراً بعد حساب الثوابت:

$$x = x_0 + \frac{(v_{xy})_0}{\omega}\sin(\omega t + \alpha), \ \ y = y_0 + \frac{(v_{xy})_0}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) \quad \textbf{(5.51)}$$

ويكون المسار دائرة يتحرك الجسيم عليها بسرعة زاوية ω مركزها يقع في النقطة $M_0(x_0, y_0)$ ومعادلتها:

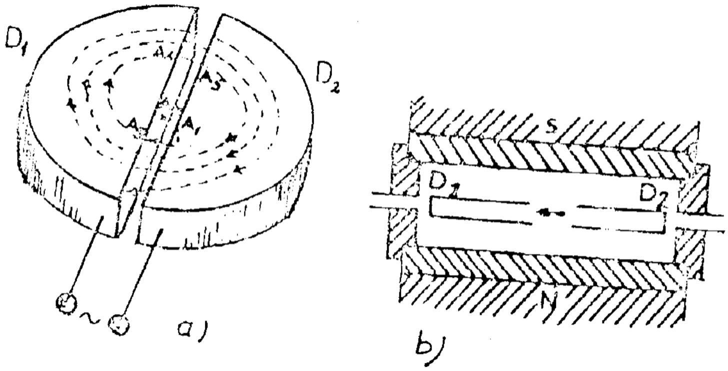
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\left(\frac{v_{xy}}{\omega}\right)^2 \qquad \textbf{(5.52)}$$

وفي الحالة الخاصة عندما تكون E صغيرة $E \approx mc^2$ يصبح التواتر:

$$\omega=\frac{qcB}{E_0}=\frac{qB}{mC} \qquad \textbf{(5.53)}$$

تعتبر العلاقات السابقة أساسية في الحسابات المتعلقة بمسرعات الجسيمات الدائرية (السيكلوترون) ويلاحظ أن التواتر يبقى ثابتاً ولايتعلق بطاقة الجسيم ولابسرعته، فالجسيم يستغرق الزمن نفسه في كل دورة من دورانه حتى عندما تزداد سرعته.

ومن الواضح أن السرعة تبقى ثابتة طبقاً لـــ (5.50)، ولكن يمكن تسريع الجسيم بتمريره ضمن تجويفين متماثلين (شكل 5.1) D_1 و D_2 مفرغين من الهواء كل منهما يشكل نصف قرص يوجد ضمنهما حقل كهربائي يتغير بالتناوب بحيث تزداد سرعة الجسيم عند دخوله في كل من التجويفين. وتكرر هذه العملية حتى لحظة خروج الجسيم من المسرع ولكن عندما تزداد السرعة زيادة كبيرة لن يكون التواتر ω ثابتاً ولابد من تطبيق العلاقة $\omega=\frac{qcB}{E_0}$ التي لاتهمل التأثيرات النسبوية على الكتلة الموجودة في المقام. ويسمى المسرع الذي يعمل على هذا الأساس المسرع النسبوي أو السينكروترون (Synchrotron) ولانود التفصيل في ذلك لأننا سنخرج من مواضيع الميكانيك التحليلي وندخل في مواضيع الفيزياء النووية.



الشكل (5.1)

43- مدخل إلى نظرية الاضطراب الكلاسيكية:

تشكل الأجسام الفضائية الآتية من الكون خطراً كبيراً على الأرض وعلى الأقمار الصناعية التي تدور حولها. ويكثر الحديث عن ذلك عندما يقترب مذنب ما من "لؤلؤة" المجموعة الشمسية، وهناك نظرية مفادها أن سبب انقراض الديناصورات هو ارتطام نيزك هائل بالأرض منذ 65 مليون سنة. فهل يمكن تجنب كارثة من هذا النوع إذا أطلق صاروخ من الأرض يمكن أن يحرف النيزك عن مساره ويزيل خطر اصطدامه بالأرض؟

سنعالج في هذه الفقرة الأخيرة من الفصل الخامس التغير الحاصل على مسار جسيم يتحرك تحت تأثير قوة معلومة $\vec{F}$، عندما يتعرض إلى اضطراب ناتج عن قوة (تأثيرها أقل بكثير من تأثير القوة $\vec{F}$) من وجهة نظر الميكانيك التقليدي، وهذا مايسمى نظرية الاضطراب الكلاسيكية تمييزاً لها عن نظرية الاضطراب الكمومية التي تدرس الظاهرة نفسها في ميكانيك الكم حيث تسود قوانين مختلفة في العالم المجهري.

وسنقدم بعض المعلومات المفيدة في هذا الموضوع بما يسمح به حجم الكتاب دون التعمق في ذلك.

لتكن الدالة:

$$f(\alpha,\beta,\gamma,....)=0 \qquad \textbf{(5.54)}$$

ولنفرض أنه حدث تغير طفيف (اضطراب) على متحولات هذه الدالة بحيث أصبحت $f(\alpha+\delta\alpha,\beta+\delta\beta+......)$. لننشر الدالة الجديدة بجوار النقطة $(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,...)$ حيث بدأ الاضطراب فنجد:

$$f(\alpha+\delta\alpha,\beta+\delta\beta,...)=f_0+\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)_0\delta\alpha+\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)_0\delta\beta+...$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\right)_0\overline{\partial\alpha}^2+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\right)_0\delta\alpha\delta\beta+... \quad \textbf{(5.55)}$$

ولنفرض أن الدالة (5.54) تمثل مسار متحرك في وضع مستقر (أو أي من عناصر هذا المسار) ولندرس كيف يتغير المسار نتيجة تأثير قوى خارجية تأثيرها أقل بكثير من تأثير القوة $\vec{F}$ التي تسبب المسار المذكور، بادئين بالمثال التالي:

يعطى نصف طول المحور الكبير لمسار قمر صناعي يدور حول الأرض بالعلاقة:

$$a=\frac{\mu r}{2\mu-rv^2} \quad \textbf{(5.56)}$$

حيث μ ثابت غوص، r بعد القمر عن مركز الأرض، ولنفرض حدوث اضطراب نتيجة عوامل خارجية أدى إلى تغير في سرعته v، فما هو تأثير ذلك على a وعلى دور القمر T؟

للإجابة عن هذا السؤال نحسب المشتق $\frac{\partial a}{\partial v}$:

$$\frac{\partial a}{\partial v}=\frac{2\mu r^2 v}{(2\mu-rv^2)^2}=\frac{2a^2 v}{\mu} \quad \textbf{(5.57)}$$

وهكذا نرى أن تغيراً طفيفاً في السرعة يؤدي إلى تغير في a يتناسب مع v.

ولحساب التأثير على دور القمر ننطلق من العلاقة المعروفة:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{r^2 g}}=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}=\frac{2\pi}{\mu^{1/2}}a^{3/2}$$

ومنه:

$$= 6\pi a^{\frac{5}{2}}\mu^{-\frac{3}{2}}v = \frac{3aTv}{\mu}\quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{2\pi}{\mu^{1/2}}\frac{3}{2}a^{1/2}\cdot\frac{2a^2v}{\mu} \quad (5.58)$$

لنحسب التغير النسبي لكل من a و T فنجد:

$$\frac{\frac{\partial a}{\partial v}}{a} = \frac{2av}{\mu},\quad \frac{\frac{\partial T}{\partial v}}{T} = \frac{3av}{\mu} \quad (5.59)$$

ومنها:

$$\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)}{T}\Bigg/\frac{\left(\frac{\partial a}{\partial v}\right)}{a} = \frac{3av}{2av} = \frac{3}{2} \quad (5.60)$$

فالتغير الذي يطرأ على الدور أكبر بمرة ونصف من ذلك الذي يطرأ على نصف طول المحور الكبير للمسار.

<u>**مثال آخر**</u>: يطلب حساب تغير عناصر مسار دائري لجسيم يتحرك في حقل مركزي إذا تغيرت السرعة بشكل طفيف.

سننطلق هذه المرة من معادلات الحركة نفسها.

لدينا المعادلة الأولى:

$$f(r,\ddot{r},\dot{\theta}) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r^2} = 0 \quad (5.61)$$

وطبقاً للمعادلة (5.55) وبإهمال الحدود من المرتبة الثانية صغراً نجد بالتفاضل:

$$f = f_0 + \delta f = \ddot{r}_0 - r_0\dot{\theta}_0^2 + \frac{\mu}{r_0^2} + \delta\ddot{r} - \left(\dot{\theta}_0^2 + \frac{2\mu}{r_0^3}\right)\delta r - 2r_0\dot{\theta}_0\delta\dot{\theta} = 0$$

(5.62)

وبما أن المعادلة (5.61) تتحقق في كل نقطة ومنها $M_0(r_0,\theta_0)$، حيث بدأ الاضطراب يكون:

$$\ddot{r}_0 - r_0\dot{\theta}_0^2 + \frac{\mu}{r_0^2} = 0 \qquad \textbf{(5.63)}$$

ويمكن أن نضع $\ddot{r}_0 = 0$ لأن المسار دائري وبالتالي نحصل من (5.63) على العلاقة:

$$r_0\dot{\theta}_0^2 = \frac{\mu}{r_0^2} \qquad \textbf{(5.64)}$$

ومن (5.62) و (5.64) نجد المعادلة:

$$\ddot{\delta r} - 3\dot{\theta}_0^2\delta r - 2r_0\dot{\theta}_0\dot{\delta\theta} = 0 \quad \textbf{(5.65)}$$

ومن معادلة الحركة الثانية المعبرة عن قانون السطوح:

$$,\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \qquad \textbf{(5.66)}$$

نحصل بالتفاضل على العلاقة:

$$2\dot{r}_0\dot{\theta}_0 + r_0\ddot{\theta}_0 + 2\dot{\theta}_0\dot{\delta r} + 2\dot{r}_0\dot{\delta\theta} + \dot{\theta}_0\delta r + r_0\ddot{\delta\theta} = 0 \quad \textbf{(5.67)}$$

فإذا علمنا أنه $\dot{r}_0 = 0$ لأن المسار دائري وكذلك نجد من (5.66) التي تتحقق في كل نقط المسار ومنها $M(r_0, \theta_0)$، أن $\ddot{\theta}_0 = 0$ أيضاً، وعندئذٍ نحصل من (5.67) على معادلة ثانية تضاف إلى (5.65) هي التالية:

$$\textbf{(5.68)}\ r_0\ddot{\delta\theta} + 2\dot{\theta}_0\dot{\delta r} = 0$$

نحل المعادلتين التفاضليتين (5.65) و (5.68) حلاً مشتركاً باعتبار أن المجهولين هما δr و $\delta\theta$ وأن الشروط الابتدائية هي:

$$(\delta r)_{t=0} = \delta r(0) = 0,\ \dot{\delta r}(0) = 0,\ \dot{\delta\theta}(0) = \frac{\Delta v}{r} \qquad \textbf{(5.69)}$$

مع العلم أن:

$$\left.\begin{aligned} r = r_0 + \delta r \Rightarrow\ \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\delta r = \dot{\delta r} \\ \theta = \theta_0 + \delta\theta \Rightarrow\ \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\delta\theta = \dot{\delta\theta} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.70)}$$

نستكمل المعادلة (5.68) مباشرة فنجد:

$$r_0\delta\dot{\theta} + 2\dot{\theta}_0\delta r = \Delta v \qquad \textbf{(5.71)}$$

وبتبديل $r_0\delta\dot{\theta}$ بقيمتها من (5.65) في (5.71) نجد:

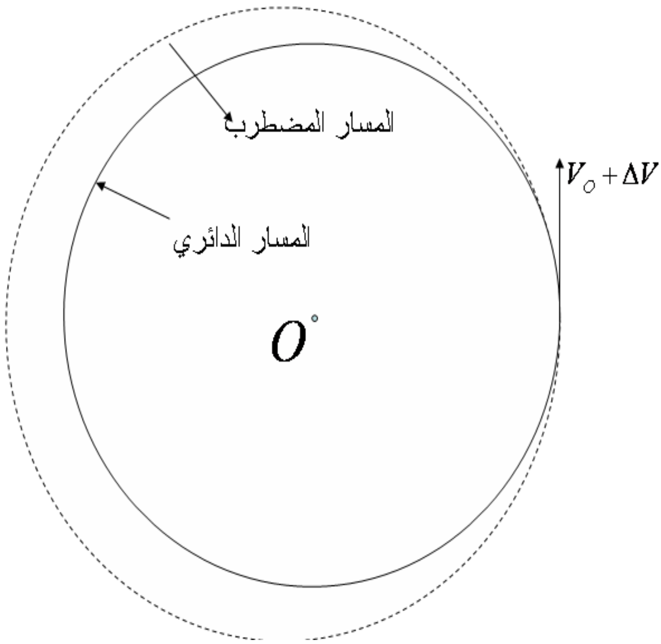
$$\delta\ddot{r} + \dot{\theta}_0^2\delta r = 2\dot{\theta}_0\Delta v \qquad \textbf{(5.72)}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية بالنسبة إلى δr بحلها نجد:

$$\delta r = \frac{2\Delta v}{\Delta_0}(1-\cos\dot{\theta}_0 t) \qquad \textbf{(5.73)}$$

ونلاحظ أن القيمة العظمى لــ δr تقابل $\dot{\theta}_0 t_1 = \pi$ وهي تساوي $\frac{4\Delta v}{\dot{\theta}_0}$

وهكذا يتحول المسار من دائرة إلى قطع ناقص (شكل 5.2) نصف طول محوره الكبير هو:



الشكل (5.2)

$$R = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} = \frac{r + (\delta r)_{t=\pi} + r + (\delta r)_{t=0}}{2} = r + \frac{2\Delta v}{\dot{\theta}_0}$$

أي أن التغير الحاصل على نصف قطر المسار الدائري هو $\frac{2\Delta v}{\dot{\theta}_0}$ وهذا يتوافق مع النتيجة التي حصلنا عليها سابقاً (5.57) وللتأكد من ذلك نكتب:

$$\delta a = \left(\frac{\partial a}{\partial v}\right)_0 \delta v = \frac{2a^2 v_0}{\mu}\Delta v = \frac{2r_0^3\dot{\theta}_0}{\mu}\Delta v$$

أو بعد تبديل μ بقيمتها من (5.64):

$$\delta a = \frac{2\Delta v}{\dot{\theta}_0} \quad \mathbf{(5.74)}$$

وهكذا تؤدي الطريقتان إلى النتائج نفسها.

ولحساب تغير $\dot{\theta}$ (أي $\delta\dot{\theta}$) نبدل δr بقيمتها من (5.73) في (5.71) فنجد:

$$\delta\dot{\theta} = -\frac{\Delta v}{r_0}(3 - 4\cos\dot{\theta}_0 t) \quad \mathbf{(5.75)}$$

ويحسب الدور عندئذٍ بالعلاقة:

$$2\pi \int_0^{T_0+\Delta T}(\dot{\theta}_0 + \delta\dot{\theta})dt = \left(\dot{\theta}_0 - \frac{3\Delta v}{r_0}\right)(T_0 + \Delta T) +$$

$$+\int_0^{T_0+\Delta T}\frac{4\Delta v}{r_0}\text{Cos}\,\dot{\theta}_0 t dt \quad \mathbf{(5.76)}$$

فإذا علمنا أن $\dot{\theta}_0 T_0 = 2\pi$ فيمكن أن نجد من العلاقة الأخيرة:

$$-\frac{3\Delta v}{r_0}T_0 + \dot{\theta}_0\delta T = 0 \Rightarrow \delta T = \frac{3\Delta v}{r_0\dot{\theta}_0}T_0 \quad \mathbf{(5.77)}$$

لنحسب التكامل الثاني من (5.76) فنجد:

$$\int_0^T \frac{4\Delta v}{r_0}\cos\dot{\theta}_0 t dt = \frac{4\Delta v}{r_0\dot{\theta}_0}\sin\dot{\theta}_0 t \Bigg|_0^{t_0+\Delta t} =$$

$$\Leftarrow \quad = \frac{4\Delta v}{r_0\dot{\theta}_0}\left[\sin\dot{\theta}_0(T_0 + \Delta T)\right] = \frac{4\Delta v}{r_0\dot{\theta}_0}\sin\dot{\theta}_0\Delta t \approx \Delta v \Delta T \quad \mathbf{(5.78)}$$

وهو من المرتبة الثانية صغراً بالنسبة للتكامل الأول ولذلك نهمله.
وبالتالي فالتغير الحاصل على الدور هو التغير المحسوب بالعلاقة (5.77).
وللتأكد من تطابق هذه النتيجة مع (5.58) التي توضع بالصيغة:

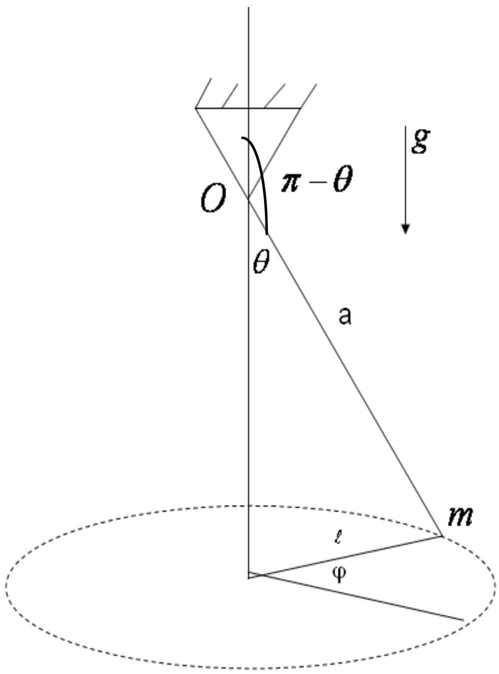
$$\delta T = \frac{3aT_0 v}{\mu}\delta v = \frac{3r_0 T_0 r_0 \dot{\theta}_0}{r_0^3 \dot{\theta}_0^2} = \frac{3\Delta v T_0}{r_0 \dot{\theta}_0} \qquad \textbf{(5.58b)}$$

وهي النتيجة (5.77) نفسها.

مثال محلول:

يتعرض نواس مخروطي طوله a يصنع زاوية $\theta = \theta_0$ مع الشاقول، إلى اضطراب يسبب انحرافاً بمقدار $\delta\theta$.

اوجد التغير في التواتر الناتج عن هذا الاضطراب. ادرس الحالة الخاصة عندما تكون θ صغيرة جداً $(\theta << 1)$.



الشكل (5.3)

الحل:

نكتب تابع لاغرانج لهذا النواس (شكل 5.3) بفرض أن إحداثياته هي $M(r,\pi-\theta,\varphi)$ فنجد:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(r^{\bullet 2} + r^2\theta^{\bullet 2} + r^{\bullet}\sin^2\theta\varphi^{\bullet 2}) - mgz$$

$$\mathbf{(5.79)} = \frac{1}{2}ma^2(\theta^{\bullet 2} + \varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta) + mga\cos\theta$$

ومنه نحصل على معادلتي الحركة التاليتين:

$$f_1(\theta^{\bullet\bullet},\varphi^{\bullet},\theta) = a\theta^{\bullet\bullet} - a\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta + g\sin\theta = 0 \quad \mathbf{(5.80)}$$

$$f(\varphi^{\bullet},\theta) = \varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta = \varphi_0^{\bullet 2}\sin^2\theta_0 \quad \mathbf{(5.81)}$$

نفاضل (5.80) و (5.81) طبقاً لـ (5.55) فنحصل على المعادلتين:

$$a\delta\theta^{\bullet\bullet} - 2a\varphi_0^{\bullet}\sin\theta_0\cos\theta_0\delta\varphi' + a\varphi_0^{\bullet 2}/\cos^2\theta - \sin^2\theta)\delta\theta + g\cos\theta_0\delta\theta = 0$$

(5.82)

$$\sin\theta_0\delta\varphi^{\bullet} + 2\varphi_0^{\bullet}\cos\theta_0\delta\theta = 0 \quad \mathbf{(5.83)}$$

نحذف $\delta\varphi^{\bullet}$ من المعادلتين السابقتين فنحصل على المعادلة التالية:

$$\delta\theta^{\bullet\bullet} + \frac{q}{a}(4\cos\theta_0 + \sin\theta_0\ \mathrm{tg}\,\theta_0)\delta\theta = 0 \qquad \mathbf{(5.84)}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة تمثل حركة اهتزازية توافقية، وبالتالي فالتغير الحاصل في θ (أي $\delta\theta$) يكون دورياً تواتره يعطى بالعلاقة:

$$\omega = \left[\frac{g}{a}(4\cos\theta_0 + \sin\theta_0\ \mathrm{tg}\theta_0\right]^{1/2} \qquad \mathbf{(5.85)}$$

وعندما $\theta << 1$ يمكن نشر الجذر بعد تبديل $\cos\theta_0$ بـــ 1 و $\sin\theta_0$ بـــ θ_0 وكذلك $\mathrm{tg}\,\theta_0$ بـــ θ_0 وهكذا نجد:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{a}(4+\theta_0^2)} = 2\sqrt{\frac{g}{a}}\left(1+\frac{\theta_0^2}{g}\right) \quad \textbf{(5.86)}$$

أما الدور T المقابل لهذا التواتر فيساوي:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1+\frac{\theta_0^2}{8}\right)^{-1} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1-\frac{\theta_0^2}{8}\right) \quad \textbf{(5.87)}$$

وهو مايعادل تقريباً نصف الدور عندما لايوجد اضطراب.

والزمن اللازم لدورتين هو:

$$t_1 = \frac{4\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1-\frac{\theta_0^2}{8}\right) \quad \textbf{(5.88)}$$

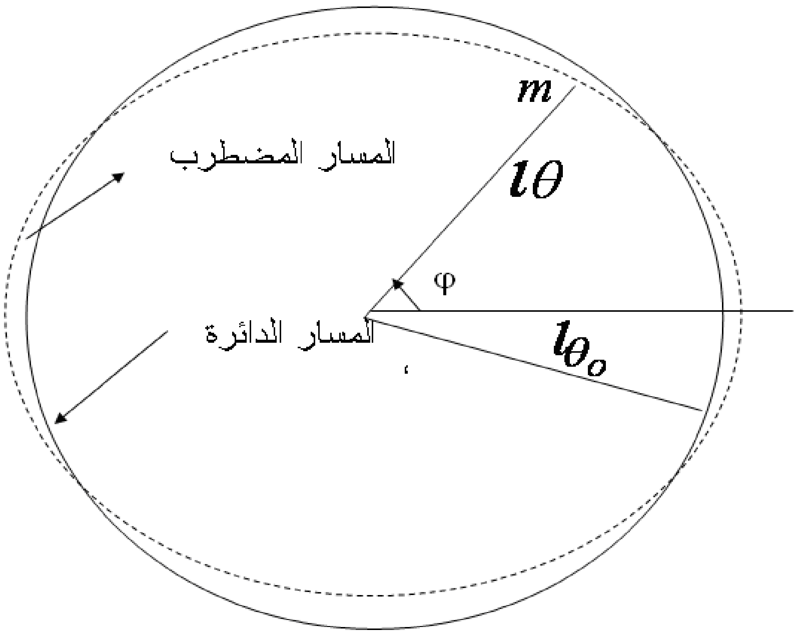
ولحساب الزاوية φ التي يقطعها النواس خلال هذه الفترة نلاحظ أولاً من (5.80) عندما $\ddot{\theta}_0 = 0$ (المعادلة صحيحة ومحققة للمسار المستقر عندما لايوجد اضطراب):

$$\dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{g}{a\ \mathrm{Cos}\,\theta_0}} = \sqrt{\frac{g}{a}}\left(1+\frac{\theta_0^2}{4}\right) \quad \textbf{(5.89)}$$

وعندئذٍ نجد أن الزاوية المقطوعة خلال الزمن t_1 هي:

$$\varphi_1 = \dot{\varphi}_0 t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1+\frac{\theta_0^2}{4}\right)\left(1-\frac{\theta_0^2}{8}\right) = 2\pi\left(1+\frac{\theta_0^2}{8}\right) \quad \textbf{(5.90)}$$

والخلاصة أنه بينما φ تقطع المسار كله أي 2π خلال الزمن t_1 تكون $\delta\theta$ قد مرت بقيمتها العظمى والصغرى مرتين (شكل 5.4).



الشكل (5.4)

الفصل السادس

حركة جسم صلب في الفضاء
MOTION OF RIGID BODY IN SPACE

تكون في الحالة العامة حركة الجسم الصلب في الفضاء مكونة من حركتين، الأولى حركة انسحابية لنقطة من الجسم، تعتبر هذه النقطة في معظم الأحيان نقطة مركز ثقل الجسم الصلب، والحركة الثانية، دورانية حول محور مار من مركز ثقل الجسم عادة، غير أن اتجاه المحور في هذه الحالة متغير مع الزمن، وهذا هو الفرق بين الحركة المستوية للجسم الصلب والحركة الفضائية له، كما أنه يكفي ثلاثة وسطاء لتعيين حركة جسم صلب يتحرك حركة مستوية، بينما لتعيين حركته الفضائية يلزم ستة وسطاء. ثلاثة منها لتعيين الحركة الإنسحابية لمركز ثقل الجسم هي [x(c) ،y(c) ،z(c)] والثلاثة الأخرى لتعيين الحركة الدورانية، لان تعيين محور الدوران يتطلب متحولين مستقلين وتعيين وضع الجسم الدائر حول المحور يتطلب متحولاً مستقلاً واحداً.

من المعلوم أن معادلة حركة مركز ثقل جسم صلب أو مجموعة ميكانيكية تخضع لتأثير قوى خارجية هي:

$$\textbf{(6.1)}\quad \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{M}\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_{CM}$$

حيث $\ddot{\vec{r}}_{CM}$ تسارع مركز ثقل الجسم الصلب أو المجموعة الميكانيكية المتحركة نتيجة تأثير قوى خارجية محصلتها $\vec{F}$. أي أن الحركة الإنسحابية لجسم صلب تدرس كدراسة الحركة الإنسحابية لنقطة مادية واحدة. وقد أغنينا في مقررات فيزيائية سابقة دراسة الحركة الإنسحابية لنقطة مادية في مختلف

الجمل الإحداثية. وسنركز الدراسة في هذا الفصل على دراسة الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور متغير مار من مركز الكتلة.

4-4-عزوم ومضاريب العطالة Moments and products of Inertia

يمكن حساب العزم الزاوي (العزم الحركي) $\vec{L}$ لجسم صلب حول نقطة O بدلالة السرعة الزاوية $\vec{\omega}$.

يتعين موضع نقطة مادية كتلتها m_i من الجسم بالنسبة إلى النقطة O بمتجه موضعها $\vec{r}_i$، ويعطى عندئذٍ متجه سرعتها بدلالة السرعة الزاوية بالعلاقة التالية:

$$\textbf{(6.2)}\ \vec{v}_i = \vec{\omega} x \vec{r}_i$$

أما العزم الزاوي لكل الجسم الصلب حول النقطة O فيساوي:

$$\textbf{(6.3)}\ \vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i x \vec{v}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_i x (\vec{\omega} x \vec{r}_i)$$

بأخذ الجمع على جميع نقط الجسم الصلب، وباستعمال خواص الضرب الاتجاهي في العلاقة السابقة، نحصل على:

$$\textbf{(6.4)}\ \vec{L} = \vec{\omega}\left(\sum_i m_i \left|\vec{r}_i\right|^2\right) - \sum_i m_i \vec{r}_i \left(\vec{r}_i . \vec{\omega}\right)$$

من الجدير ملاحظته ليس بالضرورة أن يكون متجه العزم الزاوي $\vec{L}$ موازياً لمتجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$. يمكن كتابة مسقط المعادلة (6.4)، بدلالة الإحداثيات الكارتيزية (الديكارتية)، بالصورة:

$$\textbf{(6.5)}\quad \begin{aligned} L_x &= \omega_x \sum_i m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i \\ L_y &= -\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i \left(x_i^2 + z_i^2\right) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i \\ L_z &= -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) \end{aligned}$$

ولتبسيط المعادلات في (6.5)، نعرف الكميات التالية:

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \sum_i m_i\left(y_i^2+z_i^2\right), I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i \;, I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i \\
I_{yx} &= -\sum_i m_i y_i x_i \;, I_{yy} = \sum_i m_i\left(x_i^2+z_i^2\right), I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i \\
I_{zx} &= -\sum_i m_i z_i x_i \;, I_{zy} = -\sum_i m_i z_i y_i \;, I_{zz} = \sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(6.6)}
$$

بالتعويض من المعادلات (6.6)، في المعادلات (6.5)، نجد أن مركبات العزم الزاوي تصبح بالصورة:

$$
\textbf{(6.7)}\quad
\begin{aligned}
L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\
L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\
L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z
\end{aligned}
$$

ويمكن التعبير عن مركبات العزم الزاوي في المعادلات (6.7)، بصورة مختصرة كما يلي:

$$\textbf{(6.8)}\quad L_j = \sum_k I_{jk}\omega_k$$

حيث تأخذ المتحولات j,k القيم x,y,z ، وتعرف الكميات I_{jj} بعزوم العطالة والكميات الستة I_{jk} حيث $j\neq k$ تسمى مضاريب العطالة. يمكن أن نلاحظ من المعادلات (6.6)، أن مضاريب العطالة متناظرة، أي أن:

$$\textbf{(6.9)}\quad I_{jk} = I_{kj}$$

نستطيع في هذه الحالة كتابة الكميات التسعة I_{jk} على هيئة مصفوفة تنسورية 3×3 بالصورة:

$$\textbf{(6.10)}\quad II = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

تسمى هذه المصفوفة مصفوفة العطالة.

يمكن بالاستفادة من مصفوفة العطالة صياغة العلاقات في المعادلات (6.8)، على هيئة معادلة متجهة واحدة بالشكل:

$$\textbf{(6.11)}\quad \vec{L} = II.\vec{\omega}$$

ونستطيع بالاستفادة من الدراسة السابقة صياغة المعادلة العامة لدوران جسم صلب حول مركز كتلته C أو حول نقطة مثبتة في الفضاء بالعلاقة:

$$\textbf{(6.12)}\ M_j = \frac{dL_j}{dt} = \sum_k \frac{d}{dt}\left(I_{jk}.\omega_k\right)$$

أو بصورة معادلة متجهة مختصرة كالآتي:

$$\textbf{(6.13)}\ \vec{M} = \dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\mathrm{II}.\vec{\omega})$$

حيث $\vec{M}$ متجه عزم القوة المؤثرة على الجسم.

هذا ويمكن كتابة علاقة طاقة حركة جسم صلب بدلالة عزوم ومضاريب العطالة بالمعادلة التالية:

$$\textbf{(6.14)}\ T = \frac{1}{2}\sum_i m_i.\vec{v}_i.\vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{\omega}x\vec{r}_i).(\vec{\omega}x\vec{r}_i) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\left[\sum_i m_i\vec{r}_i x(\vec{\omega}x\vec{r}_i)\right]$$

نحصل بالتعويض من المعادلة (6.3)، والمعادلة (6.8)، في المعادلة (6.14)، على طاقة الحركة بالشكل:

$$\textbf{(6.15)}\ T = \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{L} = \frac{1}{2}\sum_{jk} I_{jk}\omega_j.\omega_k$$

وتكتب على هيئة معادلة متجهة كما يلي:

$$\textbf{(6.16)}\ T = \frac{1}{2}\vec{\omega}.\mathrm{II}.\vec{\omega}$$

45-معادلات حركة جسم صلب طليق

Equations of Motion Free Rigid Body:

يعرف الجسم الصلب الطليق بأنه الجسم الذي لا يخضع أثناء حركته إلى أي ارتباطات، وبالتالي لا تؤثر على هذا الجسم سوى القوى الفعالة التي نفرض أن لها محصلة تساوي $\vec{F}$، كما ذكرنا في الفقرة السابقة فان الحركة العامة لجسم صلب تتعين بستة وسطاء. لإيجاد معادلة حركة جسم صلب نطبق نظرية كمية الحركة والعزم الزاوي، فوفقاً لنظرية كمية الحركة يكون:

$$\textbf{(6.17)}\ \mathbf{M\ddot{\vec{r}}_{cM} = \vec{F}[x(c), y(c), z(c), \theta, \varphi, \psi]}$$

بإسقاط هذه المعادلة على ثلاثة محاور إحداثية متعامدة ثابتة XYZ نجد:

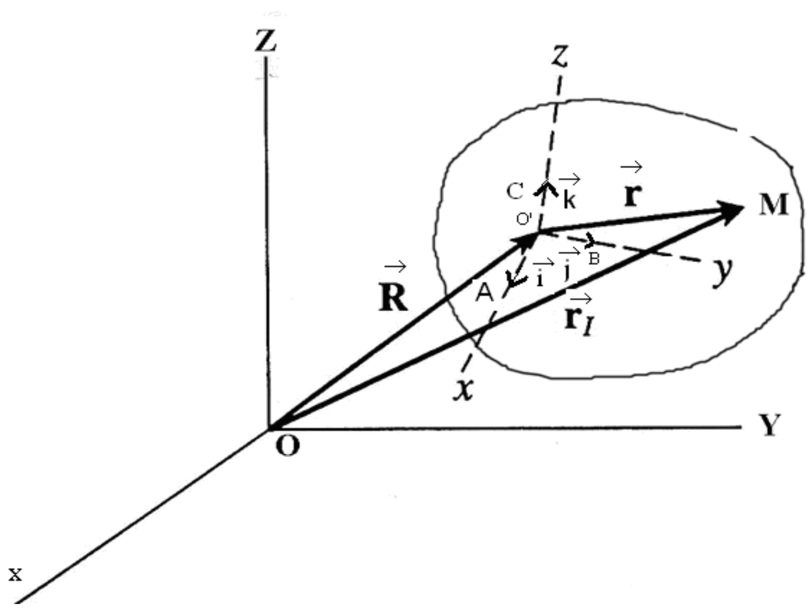
$$\textbf{(6.18)}\ M\ddot{x}(c) = F_x\ , M\ddot{y}(c) = F_y\ ,\ M\ddot{z}(c) = F_z$$

هذه المعادلات كافية لتعيين حركة مركز كتلة الجسم المتحرك بدلالة الزمن، ولتعيين الحركة الدورانية للجسم الصلب، نحاول إيجاد ثلاث معادلات أخرى تصف الحركة الدورانية، وهذا ممكن من تطبيق نظرية العزم الحركي $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{ext}$. (M^{ext} عزوم القوى الخارجية المؤثرة على الجسم).

بفرض أن جملة إحداثيات OXYZ مثبتة وجملة إحداثيات أخرى cxyz متماسكة مع الجسم الصلب كما هو مبين على الشكل (6.1).

يعطى متجه العزم الحركي $\vec{L}$، بدلالة مركباته على محاور الجملة الإحداثية xyz، بالعلاقة:

$$\textbf{(6.19)}\ \vec{L} = L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k}$$



الشكل(6.1): الحركة العامة للجسم الصلب

باشتقاق العزم الحركي $\vec{L}$ بالنسبة للزمن في جملة الإحداثيات المثبتة XYZ، نحصل على $\vec{M}$ عزم القوة المؤثرة بالنسبة إلى هذه الجملة. يجب ملاحظة أنه ليس المتجه $\vec{L}$ وحده هو المتغير بل تتغير متجهات الوحدة $\vec{k}\ ,\vec{j}\ ,\vec{i}$

لأنها محمولة على المحاور z,y,x التي تدور (تتغير مع الزمن) بالنسبة إلى المجموعة المثبتة، لذلك نجد أن:

$$\textbf{(6.20)}\quad \begin{aligned}\vec{M} &= \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_F = \frac{dL_x}{dt}\vec{i} + \frac{dL_y}{dt}\vec{j} + \frac{dL_z}{dt}\vec{k} + L_x\frac{d\vec{i}}{dt} + L_y\frac{d\vec{j}}{dt} + L_z\frac{d\vec{k}}{dt}\\ &= \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_M + L_x\frac{d\vec{i}}{dt} + L_y\frac{d\vec{j}}{dt} + L_z\frac{d\vec{k}}{dt}\end{aligned}$$

يدل الرمز M في المعادلة (6.20)، تحت الخط القائم على أن الاشتقاق يتم بالنسبة إلى الجملة المتحركة xyz و يدل الرمز F على أن الاشتقاق يتم بالنسبة إلى الجملة المثبتة XYZ.

نحسب الآن مشتقات متجهات الواحدة $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ بالنسبة للزمن ونعوض في المعادلة (6.20)، من أجل ذلك نفرض أن النقط A,B,C هي نهايات متجهات الواحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ على الترتيب كما على الشكل (6.1)، فنحصل من مشتقات هذه المتجهات على:

$$\textbf{(6.21)}\quad \begin{aligned}\frac{d\vec{i}}{dt} &= \frac{do\vec{A}}{dt} = \vec{v}(A) = \vec{\omega}\times\overrightarrow{oA} = \vec{\omega}\times\vec{i}\\ \frac{d\vec{j}}{dt} &= \frac{do\vec{B}}{dt} = \vec{v}(B) = \vec{\omega}\times\overrightarrow{oB} = \vec{\omega}\times\vec{j}\\ \frac{d\vec{k}}{dt} &= \frac{do\vec{C}}{dt} = \vec{v}(C) = \vec{\omega}\times\overrightarrow{oC} = \vec{\omega}\times\vec{k}\end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة (6.20)،نحصل على:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_F = \frac{dL_x}{dt}\vec{i} + \frac{dL_y}{dt}\vec{j} + \frac{dL_z}{dt}\vec{k} + L_x\frac{d\vec{i}}{dt} + L_y\frac{d\vec{j}}{dt} + L_z\frac{d\vec{k}}{dt}\\ &= \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_M + L_x(\vec{\omega}\times\vec{i}) + L_y(\vec{\omega}\times\vec{j}) + L_z(\vec{\omega}\times\vec{k})\\ &= \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_M + (\vec{\omega}\times L_x\vec{i}) + (\vec{\omega}\times L_y\vec{j}) + (\vec{\omega}\times L_z\vec{k})\\ &= \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_M + \vec{\omega}x(L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k}) = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\times\vec{L}\end{aligned}$$

أي أن:

$$\vec{M} = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \times \vec{L} \qquad \textbf{(6.22)}$$

نستنتج أن عزم القوة المؤثرة على الجسم بالنسبة لمجموعة محاور مثبتة يساوي إلى عزم هذه القوة بالنسبة لمجموعة محاور تدور بسرعة زاوية $\vec{\omega}$ بالنسبة للجملة المثبتة مضافا إليها الضرب الاتجاهي لمتجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ لدوران الجملة المتحركة في متجه العزم الزاوي $\vec{L}$ للجسم المتحرك. نسقط المعادلة (6.22)، على محاور الجملة cxyz المتحركة مع الجسم الصلب، نجد:

$$\textbf{(6.23)} \quad \begin{aligned} M_x &= \frac{dL_x}{dt} + (\omega_y L_z - \omega_z L_y) \\ M_y &= \frac{dL_y}{dt} + (\omega_z L_x - \omega_x L_z) \\ M_z &= \frac{dL_z}{dt} + (\omega_x L_y - \omega_y L_x) \end{aligned}$$

حيث L_z، L_y، L_x عزوم العطالة حول المحاور cz، cy، cx على الترتيب.

46- المحاور الرئيسية ومعادلات أولر:

Principal Axes and Euler's Equations:

تعتبر الحالة الأكثر سهولة هي اعتبار محاور الجملة المتحركة cxyz محاور رئيسية (محاور عطالة أساسية) (principal axes) للجسم الصلب في الرسم السابق. يمكن في هذه الحالة اعتبار أن مضاريب العطالة تساوي الصفر، أي أن:

$$\mathbf{I_{ij} = 0} \text{ من أجل } \mathbf{i \neq j} \qquad \textbf{(6.24)}$$

تسمى المحاور التي من أجلها تتحقق المعادلة (6.24)، بمحاور العطالة الرئيسية للجسم الصلب (محاور متعامدة وتنعدم من أجلها مضاريب العطالة).

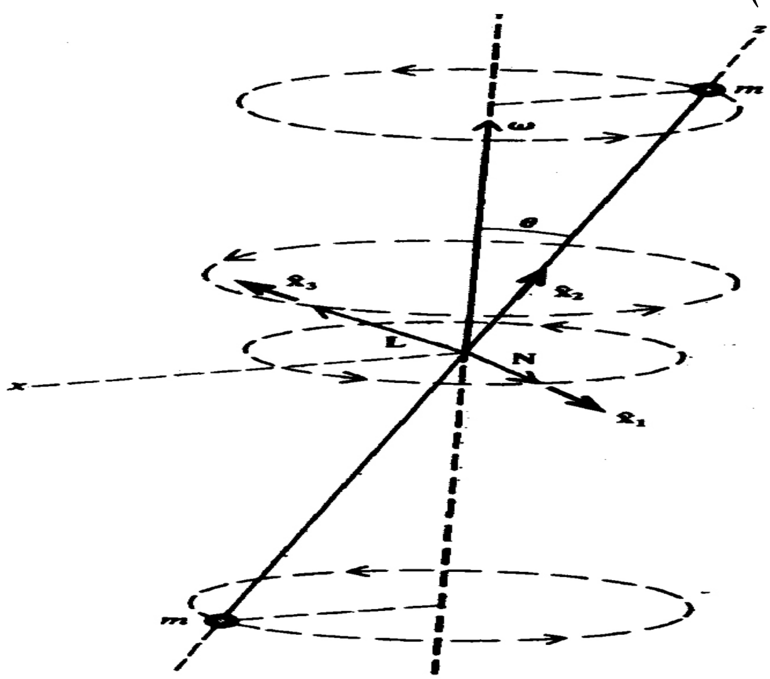
يمكن كتابة مركبات العزم الزاوي $\vec{L}$، المعادلات (6.7)، بالنسبة لمحاور العطالة الرئيسية بالصورة:

$$L_1 = I_{11}\omega_1 \equiv I_1\omega_1$$
$$L_2 = I_{22}\omega_2 \equiv I_2\omega_2 \qquad \textbf{(6.25)}$$
$$L_3 = I_{33}\omega_3 \equiv I_3\omega_3$$

يمكن الحصول من المعادلة (6.22)، على معادلات الحركة الدورانية للجسم الصلب بالنسبة لجملة إحداثيات محاور العطالة الرئيسية المتماسكة مع الجسم الصلب، وذلك بالصورة:

$$M_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2$$
$$\textbf{(6.26)}\ M_2 = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3$$
$$M_3 = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1$$

تسمى هذه المعادلات بمعادلات أولر، يعطي حلها متجه الدوران $\vec{\omega}$ في أية لحظة زمنية t، ويتبين من هذه المعادلات أنه من الصعب إن لم يكن من المستحيل حلها إلا في حالات خاصة، ولشرح تطبيقات معادلات أولر ندرس دوران جسم صلب على شكل قضيب طويل في نهايتيه كتلتين كلٍ منهما m، يدور بسرعة زاوية ثابتة، حيث نعتبر المحاور الإحداثية كما هي مبينة على الشكل (6.2).



الشكل(6.2): المحاور الرئيسية $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ **للكتلتين في القضيب**

يعتبر المحور z على امتداد القضيب والمحور x والمتجه $\vec{\omega}$ في مستوى القضيب، عندئذٍ تكون مركبات متجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ هي:

$$\omega_1 = \omega \sin\theta$$
$$\textbf{(6.27)}\quad \omega_2 = 0$$
$$\omega_3 = \omega\cos\theta$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجه $\vec{\omega}$ والقضيب (المحور z)، نجد حسب مبدأ عزم العطالة أن:

$$\textbf{(6.28)}\quad I_1 = I_2 = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2$$

بالتعويض من المعادلتين (6.27) و(6.28)، في المعادلات (6.26)، نحصل على معادلات الحركة بالشكل التالي:

$$M_1 = 0$$
$$\textbf{(6.29)}\quad M_2 = \left(\frac{1}{2}ml^2\right)\omega^2 \sin\theta\cos\theta$$
$$M_3 = 0$$

حيث أن $\dot{\omega} = 0$، وتم الحصول على هذه النتيجة من معادلات أولر.

وقد استخدمنا عند الحصول على المعادلات (6.26)، الخاصة القطرية (6.24)، لتنسور العطالة في جملة المحاور الرئيسية، وسنحاول الآن ترسيخ هذه الخاصة. بفرض أنه يوجد اتجاه في فضاء ω بحيث يكون متجه العزم الزاوي $\vec{L}$ ومتجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ متوازيان، يمكننا عندئذٍ أن نكتب متجه العزم الزاوي بالصورة:

$$\textbf{(6.30)}\quad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

إذا أمكن إيجاد مثل هذا الاتجاه، فإنه يمكن تعريف المحور الرئيسي حيث تنعدم مضاريب العطالة، ويكون عزم العطالة الرئيسي هو I. يمكن بشكل عام كتابة متجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ بدلالة مركباته بالشكل التالي:

$$\textbf{(6.31)}\quad \vec{\omega} = \omega_1\hat{x} + \omega_2\hat{y} + \omega_3\hat{z}$$

حيث $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ متجهات واحدة على المحاور x,y,z على الترتيب.

نجد بإسقاط المعادلة (6.30)، على محاور جملة عطالية أن:

$$L_1 = I\omega_1$$
$$\textbf{(6.32)}\ L_2 = I\omega_2$$
$$L_3 = I\omega_3$$

يجب أن تكافئ هذه المركبات مركبات العزم الزاوي $\vec{L}$ في المعادلة (6.7)، أي أن:

$$L_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3$$
$$\textbf{(6.33)}\ L_2 = I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3$$
$$L_3 = I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3$$

ونحصل من المطابقة بين المعادلتين (6.32) و(6.33)، على:

$$(I_{11} - I)\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 = 0$$
$$\textbf{(6.34)}\ I_{21}\omega_1 + (I_{22} - I)\omega_2 + I_{23}\omega_3 = 0$$
$$I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + (I_{33} - I)\omega_3 = 0$$

هذا ويمكن كتابة المعادلات (6.34)،على هيئة معادلة مختصرة واحدة بالصورة:

$$\textbf{(6.35)}\ \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j = I\omega_i \qquad i, j = x, y, z$$

أو بمعادلة متجهة بالشكل:

$$\textbf{(6.36)}\ \mathrm{II}\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

حيث تعطى المصفوفة II بالعلاقة (6.10)، وتمثل المعادلات (6.34)، عندما $\vec{\omega} \neq 0$ ثلاث معادلات جبرية متجانسة فيها ثلاثة متحولات $\omega_1, \omega_2, \omega_3$، ولكي يكون لها حل لا يساوي الصفر، يجب أن يكون محدد الأمثال فيها مساوياً للصفر، أي أن:

$$\textbf{(6.37)}\ \begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0$$

نحصل من حل هذا المحدد على المعادلة التالية:

$$\textbf{(6.38)}\ I^3 + aI^2 + bI + c = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثالثة بالنسبة إلى I وأن a،b،c هي مضاريب لعناصر تنسور العطالة I_{ij}. يتبين من المعادلة (6.38)، أنه توجد ثلاثة حلول حقيقية لـــ I هي جذور هذه المعادلة، لتكن I_1, I_2, I_3.

بتعويض كل قيمة لـــ I في المعادلات (6.34)، نحصل على قيم $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ بشرط أن نختار إحداها بشكل اختياري. توجد إذن محاور رئيسية D_1, D_2, D_3 تكون متجهات الدوران حولها هي: $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$، وتعطى بالمعادلات التالية:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_1 &= \omega_{11}\vec{i} + \omega_{21}\vec{j} + \omega_{31}\vec{k} \\ \textbf{(6.39)}\quad \vec{\omega}_2 &= \omega_{21}\vec{i} + \omega_{22}\vec{j} + \omega_{23}\vec{k} \\ \vec{\omega}_3 &= \omega_{31}\vec{i} + \omega_{32}\vec{j} + \omega_{33}\vec{k} \end{aligned}$$

تكون المحاور D_1, D_2, D_3 أو $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ متعامدة فيما بينها. وصفة التعامد ناتجة من كون هذه المتجهات الثلاث حلولاً لمجموعة واحدة من المعادلات (6.34).

تختار في معظم التطبيقات محاور العطالة الرئيسية كمحاور تناظر للجسم الصلب، فإذا تساوى اثنان من العزوم الرئيسية فإن الجسم يدور بشكل متناظر حول المحور الثالث في المستوى.

وإذا تساوت العزوم الرئيسية الثلاثة فإن الجسم يكون متماثل الدوران حول المحاور.

تعتبر خاصة التناظر ذات أهمية كبرى في الحصول على معادلات حركة الجسم كما سنرى لاحقاً.

47-الأرض كدوامة حرة متناظرة:

The Earth as a Free Symmetric Top:

لقد وجدنا عند دراسة الحركة في المجال المركزي أن حركة الأرض تتكون من حركتين رئيستين، الأولى حركة مركز الأرض حول الشمس والثانية حركتها الدورانية حول محور يمر من مركز كتلتها. بفرض أن للأرض شكلاً كروياً. وبفرض أن القوة المؤثرة عليها هي قوة جذب الشمس والقمر، إن هذه

القوى تمر من مركز الأرض، لذلك فان عزوم القوى الخارجية المؤثرة على الأرض يساوي الصفر، أي أن $\vec{M}^{ext} = 0$. بما أننا افترضنا أن للأرض شكلاً كروياً فهي متناظرة بالنسبة لمحورها، وبالتالي تتساوى عزوم العطالة حول محورين رئيسيين في المستوى الاستوائي للكرة، أي أن:

$$\textbf{(6.40)}\; I_1 = I_2 = I$$

أما المحور الرئيسي الثالث فيكون على امتداد المحور القطبي التناظري للأرض. يمكن إيجاد معادلات حركة الأرض من مجموعة معادلات أولر (6.26)، حيث نحصل بعد التعويض عن عزم القوى الخارجية بالصفر على:

$$\textbf{(6.41)}\; \begin{aligned} &\dot{\omega}_1 + \frac{I_3 - I}{I}\omega_2\omega_3 = 0 \\ &\dot{\omega}_2 - \frac{I_3 - I}{I}\omega_1\omega_3 = 0 \\ &\dot{\omega}_3 = 0 \end{aligned}$$

يدعى أي جسم صلب تحقق حركته مجموعة المعادلات (6.41)، دوامة حرة متناظرة محورياً، ويمكن حل هذه المجموعة بدقة، حيث ينتج من المعادلة الثالثة في المعادلات (6.41)، أن ω_3 تساوي مقداراً ثابتاً.

$$\textbf{(6.42)}\; \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3(t) = \omega_3(0) = \omega_3$$

يعطى حل المعادلات (6.41)، بالصورة:

$$\textbf{(6.43)}\; \begin{aligned} \omega_1(t) &= a\cos(\Omega t + \alpha) \\ \omega_2(t) &= a\sin(\Omega t + \alpha) \end{aligned}$$

حيث:

$$\textbf{(6.44)}\; \Omega = \omega_3\left(\frac{I_3 - I}{I}\right)$$

وتعطى قيمة السرعة الزاوية بالعلاقة:

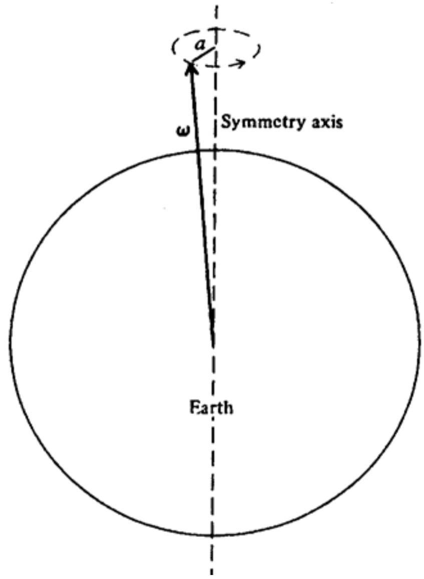
$$\textbf{(6.45)}\; \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{a^2 + \omega_3^2}$$

يتضح من المعادلتين في (6.43)، أن المركبتين ω_1 و ω_2 ترسمان دائرة خارجية نصف قطرها a. بينما ω_3 و ω تبقيان ثابتتين بالنسبة إلى مراقب على

الأرض ينظر إلى متجه السرعة الزاوية الذي يدور حول محور التناظر بسرعة زاوية Ω كما يتضح من الشكل (6.3).

أما دور حركة المبادرة للمتجه $\vec{\omega}$ حول محور تناظر الأرض فيساوي:

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = \left(\frac{I}{I_3 - I}\right)\frac{2\pi}{\omega_3} \quad \textbf{(6.46)}$$



الشكل (6.3): دوران الأرض حول محور تناظرها

ويكون بالنسبة للأرض $\frac{2\pi}{\omega_3} = 1\text{day}$، ويتعين دور حركة المبادرة بالأيام من حساب نسبة عزم العطالة. فإذا اعتبرت الأرض شبه كروية وذات كثافة منتظمة، فإن قيمة النسبة تحسب من قياس نصف قطر الأرض، ويكون:

$$\frac{I}{I_3 - I} \approx 300 \quad \textbf{(6.47)}$$

بالرغم من أن كثافة الأرض تزداد ابتداءً من المركز، فانه لا يمكن تقدير تغير نسبة عزم العطالة في هذه الحالة من حالة الشكل المنتظم الكثافة. وهكذا فإن الدور المتوقع لحركة المبادرة يكون حوالي 300 يوم.

ويمكن تعيين اتجاه محور دوران الأرض (اتجاه المتجه ω) بالتجربة، وقد وجد بالمراقبة أن دور حركة مبادرة الأرض حول محور تناظرها حوالي

440 يوماً، وأن الزاوية بين المتجه ω ومحور تناظر الأرض صغيرة جداً، بحيث لا يتحرك المتجه ω عند القطب الشمالي بعيداً عن محور التناظر أكثر من 10 متر، وتكون حركة المتجه ω عادة غير منتظمة وذلك بسبب الزلازل والتغيرات الموسمية التي تحدث.

ويعلل التناقض بين القيمة المتوقعة للدور بـــ 300 يوم وبين القيمة المحسوبة بالمراقبة حوالي 440 يوم إلى أن كثافة الأرض غير متجانسة، فهي ليست كلها صلبة بل تشغل السوائل جزء كبيراً من كتلتها.

48-حركة جسم صلب متناظر – مخروط الجسم ومخروط الفضاء:

Motion of symmetric Rigid Body-Body Cone and space Cone:

لقد تم في الفقرة السابقة وصف حركة الأرض كدوامة حرة متناظرة من وجهة نظر مراقب موجود في جملة دوارة. وسنركز الدراسة في هذه الفقرة على حركة جسم صلب متناظر بالنسبة لمحور منه، ندرس كمثال على ذلك حركة دوامة حرة متناظرة كما تظهر من قبل مراقب خارجي موجود في جملة عطالية.

يعطى في حالة الدوامة المتناظرة متجه العزم الزاوي $\vec{L}$ ومتجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$(متجه الدوران) بدلالة المركبات في جملة المحاور الأساسية (x,y,z) في الدوامة بالصورة:

$$\textbf{(6.48)}\quad \begin{aligned}\vec{L} &= I(\omega_1\hat{x} + \omega_2\hat{y}) + I_3\omega_3\hat{z}\\ \vec{\omega} &= (\omega_1\hat{x} + \omega_2\hat{y}) + \omega_3\hat{z}\end{aligned}$$

حيث $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ متجهات واحدة على محاور الجملة العطالية (x,y,z)، ويعتبر المحور z محور تناظر الدوامة و $\hat{L}$ متجه الواحدة على المتجه $\vec{L}$.

نحسب $\omega_1\hat{x} + \omega_2\hat{y}$ من المعادلة الأولى في (6.48)، ونعوض في المعادلة الثانية، نحصل على متجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ بدلالة المتجهين $\vec{L}$ و $\hat{z}$:

$$\textbf{(6.49)}\quad \vec{\omega} = \frac{L}{I}\hat{L} - \Omega\hat{z}$$

حيث:

$$\Omega \equiv \left(\frac{I_3 - I}{I}\right)\omega_3$$

يتبين من المعادلة (6.49)، أن العلاقة بين المتجهات $\hat{z}, \vec{L}, \vec{\omega}$ هي علاقة خطية، وبالتالي فهذه المتجهات يجب أن تقع في مستوى واحد، وينتج كذلك من انعدام عزوم القوى الخارجية على الدوامة أن المتجه $\vec{L}$ ثابت في جملة الإحداثيات العطالية، وبالتالي فإن مستوى المتجهين $\vec{\omega}, \hat{z}$ يدور (حركة مبادرة) حول المحور $\vec{L}$. يمكن حل المعادلة (6.49)، بالنسبة لحركة الدوامة كما يشاهدها مراقب في جملة إحداثيات عطالية وذلك بإيجاد مركبتين للسرعة الزاوية هما ω_L على امتداد المتجه $\vec{L}$ و ω_3 على امتداد المتجه $\hat{z}$ غير المتعامدين وذلك كما يلي:

$$\textbf{(6.50)}\quad \omega_L = \frac{L}{I}$$
$$\omega_3 = -\Omega$$

بما أن $\hat{z}$ متجه مثبت في الجسم (يدور مع الجسم). نحصل من المعادلة (6.49)، ومن صحة العلاقات التالية:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}\,, \quad \frac{d\hat{y}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{y}\,, \quad \frac{d\hat{z}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{z}$$

على أن:

$$\textbf{(6.51)}\quad \frac{d\hat{z}}{dt} = \dot{\hat{z}} = \vec{\omega} \times \hat{z} = \left(\omega_L \hat{L}\right) \times \hat{z}$$

تبين هذه المعادلة أن محور التناظر $\hat{z}$ يدور (حركة مبادرة) بسرعة زاوية ثابتة $\omega_L \hat{L}$ حول محور العطالة الثابت $\vec{L}$. قد يطرح السؤال التالي: كيف تبدو حركة الدوامة لمراقب موجود على سطحها ويدور معها بسرعة زاوية $\omega_L \hat{L}$ ؟ تكون السرعة الزاوية ω^* للدوامة كما تبدو من قبل مراقب موجود في نظام يدور بسرعة زاوية $\omega_L \hat{L}$ مساوية إلى:

$$\vec{\omega}^* = \vec{\omega} - \omega_L \hat{L} = -\Omega \hat{z}$$

أي أن حركة الدوامة كما تبدو من جملة مثبتة فيها هي حركة دورانية حول محور التناظر z بمعدل سرعة زاوية $-\Omega$، وهو معدل دوران الدوامة

بالنسبة إلى ω (متجه مثبت في جملة المبادرة)، نستنتج أن $\Omega+$ معدل سرعة دوران المتجه $\vec{\omega}$ بالنسبة إلى الجسم، وقيمتها تعطى من المعادلة (6.44)، المستنتجة من معادلات أولر.

يصنع متجه تناظر الدوامة $\hat{z}$ أثناء دورانها مع المتجه $\vec{L}$ ومع المتجه $\vec{\omega}$ زوايا تبقى ثابتة، كما يتضح من المعادلتين (6.49)، (6.51)، أو من قانون حفظ الطاقة والعزم الزاوي. بما أن عزم القوى الخارجية يساوي صفراً كما ذكرنا سابقاً، فإن كلٍ من العزم الزاوي $\vec{L}$ وطاقة الحركة الزاوية T يكون ثابتاً. يمكننا بالاستفادة من المعادلة (6.48)، أن نكتب $\vec{L}$ بالشكل التالي:

$$\textbf{(6.52)}\ \vec{L} = I\omega_n\hat{n} + I_3\omega_3\hat{z}$$

حيث:

$$\textbf{(6.53)}\ \omega_n\hat{n} = \omega_1\hat{x} + \omega_2\hat{y}$$

بما أن $\hat{z},\hat{n}$ متعامدان، فإننا نستطيع أن نحصل بدلالة المركبتين ω_n و ω_3 على:

$$\textbf{(6.54)}\ \begin{array}{l} L^2 = I^2\omega_n^2 + I_3^2\omega_3^2 \\ 2T = \vec{L}.\vec{\omega} = I\omega_n^2 + I_3\omega_3^2 \end{array}$$

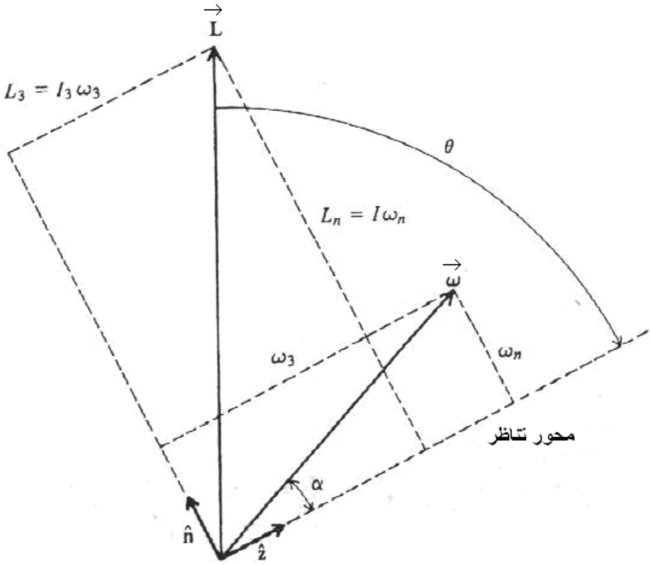
حيث T طاقة الحركة الدورانية.

ينتج من كون كلٍ من L^2 و T يساوي مقداراً ثابتاً، أن ω_n,ω_3 مقدارين ثابتين، ونجد من المعادلة (6.48)، أن قيمة السرعة الزاوية تساوي إلى:

$$\omega = \sqrt{\omega_n^2 + \omega_3^2}$$

نستنتج أن متجه الدوران $\vec{\omega}$ يرسم مخروطاً دورانياً حول المحور oz بسرعة زاوية ثابتة Ω، وهذا المخروط ثابت في جملة الإحداثيات المثبتة في الجسم، لذلك يسمى مخروط الجسم كما هو مبين على الشكل (6.5)، وقد وجدنا سابقاً أن العزم الزاوي $\vec{L}$ ثابت في الفضاء وأن ناتج الضرب القياسي (العددي) للمتجهين $\vec{\omega}.\vec{L}$ ثابت أيضا، هذا يعني أن مسقط المتجه $\vec{\omega}$ على المتجه $\vec{L}$ ثابت دوماً، ولما كانت قيمة متجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ ثابتة، فإننا نستنتج أن المتجه $\vec{\omega}$

يرسم مخروطاً ثابتاً في الفضاء محوره $\vec{L}$. يسمى المخروط الثابت في الفضاء (مخروط الفضاء).



الشكل(6.4) مركبات السرعة الزاوية والعزم الزاوي على محور التناظر $\hat{z}$ للدوامة وعلى المحور $\hat{n}$ العمود على $\hat{z}$ في مستوى المتجهين $\vec{L},\vec{\omega}$

نستنتج من كل ما تقدم النتيجة التالية: يتدحرج مخروط الجسم الذي يرسمه المتجه $\vec{\omega}$ في الجملة الإحداثية المتماسكة مع الجسم أثناء الحركة على مخروط الفضاء الذي يرسمه المتجه $\vec{\omega}$ حول المتجه $\vec{L}$، وبعبارة أخرى، يمكن القول أن الحركة تتعين بدحرجة مخروط الجسم على مخروط الفضاء، لذلك يسمى مخروط الجسم بالمتدحرج ومخروط الفضاء بالقاعدة، ولمعرفة وضع المخروطين الجسمي والفضائي بالنسبة لبعضهما، نرمز للزاوية بين المحور $\hat{z}$ والمتجه $\vec{L}$ بالرمز θ وللزاوية بين $\hat{z}$ و $\vec{\omega}$ بالرمز α، كما هو موضح على الشكل (6.4)، وتتعين هاتان الزاويتان بالعلاقتين التاليتين:

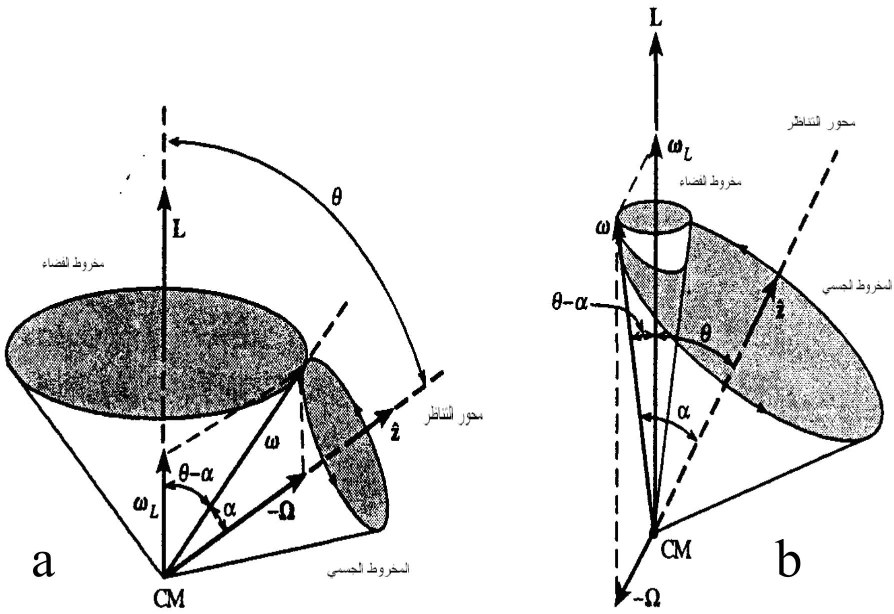
$$\tan\alpha = \frac{\omega_n}{\omega_3}$$
$$\tan\theta = \frac{L_n}{L_3} = \frac{I\omega_n}{I_3\omega_3} \qquad \textbf{(6.55)}$$

نحصل من نسب المعادلة الثانية إلى الأولى على:

$$\frac{\tan\theta}{\tan\alpha} = \frac{I}{I_3} \quad \textbf{(6.56)}$$

فإذا إذا كان $I_3 \rangle I$ فإن الزاوية α تكون أصغر من الزاوية θ، توافق هذه الحالة حالة قمة متطاولة، ويقع في هذه الحالة مخروط الفضاء خارج مخروط الجسم، ويقال في هذه الحالة أن مخروط الجسم يتدحرج من الخارج على مخروط الفضاء الشكل (6.5a).

أما إذا كان $I_3 \rangle I$ فإن الزاوية α تكون أكبر من الزاوية θ ، توافق هذه الحالة حالة قمة مفلطحة، ويقع في هذه الحالة مخروط الفضاء داخل مخروط الجسم، ويقال عندئذٍ أن مخروط الجسم يتدحرج من الداخل على مخروط الفضاء الشكل (6.5b)،



الشكل (6.5): مخروط الفضاء ومخروط الجسم

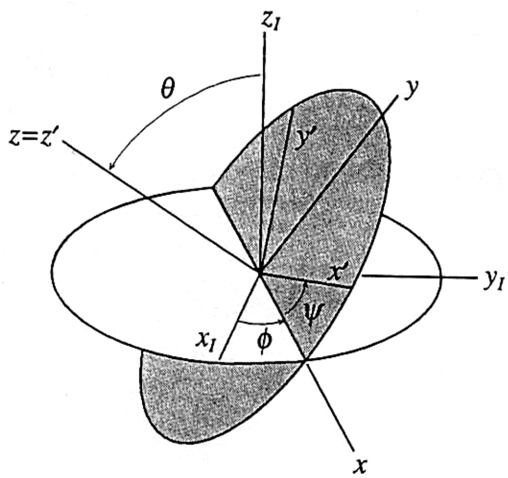
49- الحركة المغزلية لدوامة ثقيلة متناظرة:

The Heavy symmetric Top:

درسنا إلى الآن الحركة الدورانية لجسم صلب في الفراغ بدلالة مركبات متجه الدوران $\vec{\omega}$ على محاور جملة إحداثيات متماسكة مع الجسم الدائر. غير

أن هذه الدراسة لا تصف الحركة الدورانية بشكلٍ جيد وسلس، لذلك نستخدم لتحليل الحركة الدورانية لدوامة مثلاً ثلاثة إحداثيات زاوية مناسبة هي ϕ, θ, ψ، تسمى زوايا أولر وهذه الزوايا مبينة على الشكل (6.6).

نعتبر أن جملة الإحداثيات $x_1y_1z_1$، جملة عطالية (مثبتة) مبدؤها في نقطة تماس الدوامة مع السطح الذي تتحرك عليه، نحصل على جملة الإحداثيات xyz من دوران الدوامة بزاوية ϕ حول المحور z_1 متبوعاً بدوران بزاوية θ حول المحور x.



الشكل (6.6): زوايا أولر

ويسمى المحور x خط العقد. ويتم الحصول على نظام الإحداثيات **x′y′z′** من الدوران بزاوية ψ حول المحور z. توضح الزوايا ϕ, θ, ψ نظام الإحداثيات **x′y′z′** بالنسبة إلى نظام الإحداثيات $x_1y_1z_1$.

تعتبر دراسة حركة الدوامة (البلبل) التي يستخدمها الأطفال في ألعابهم أحد أهم تطبيقات دراسة حركة جسم صلب في الفضاء لما لذلك من أهمية في فيزياء الفلك والفيزياء النووية، وسنناقش في هذه الفقرة حركة الدوامة المتناظرة في مجال الجاذبية الأرضية كحالة خاصة.

نعتبر نقطة من الدوامة على تماس مع السطح الذي تدور عليه، وسنستخدم في تحليل دراسة الحركة الدورانية كما ذكرنا زوايا أولر ϕ, θ, ψ كإحداثيات زاوية لتعيين الحركة كما هو مبين على الشكل (6.6).

قبل دراسة حركة الدوامة رياضياً نلقي نظرة على هذه الظاهرة الفيزيائية. تبين دراسة الحركة العامة، أن الدوامة تدور حول محورها بسرعة زاوية كبيرة يطلق عليها أسم حركة البرم أو الالتفاف (spin). بالإضافة إلى ذلك فان محور تناظرها يدور ببطء حول المحور الرأسي z_1، وتسمى هذه الحركة حركة مبادرة (precession). علاوة على ذلك فان محور تناظر الدوامة z يبتعد ويقترب من المحور z_1، وتسمى هذه الحركة بحركة الترنح (nutation)، والسؤال المستغرب في حركة الدوامة، هو لماذا لا تسقط الدوامة على الأرض بتأثير قوة ثقلها؟ للإجابة عن هذا السؤال لا بد من دراسة الحركة رياضياً، ومن ثم تفسير النتائج الرياضية من الناحية الفيزيائية.

يعطى متجه السرعة الزاوية لدوران الدوامة بدلالة زوايا أولر بالعلاقة التالية:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\hat{z}_1 + \dot{\theta}\,\hat{x} + \dot{\psi}\,\hat{z} \qquad \textbf{(6.57)}$$

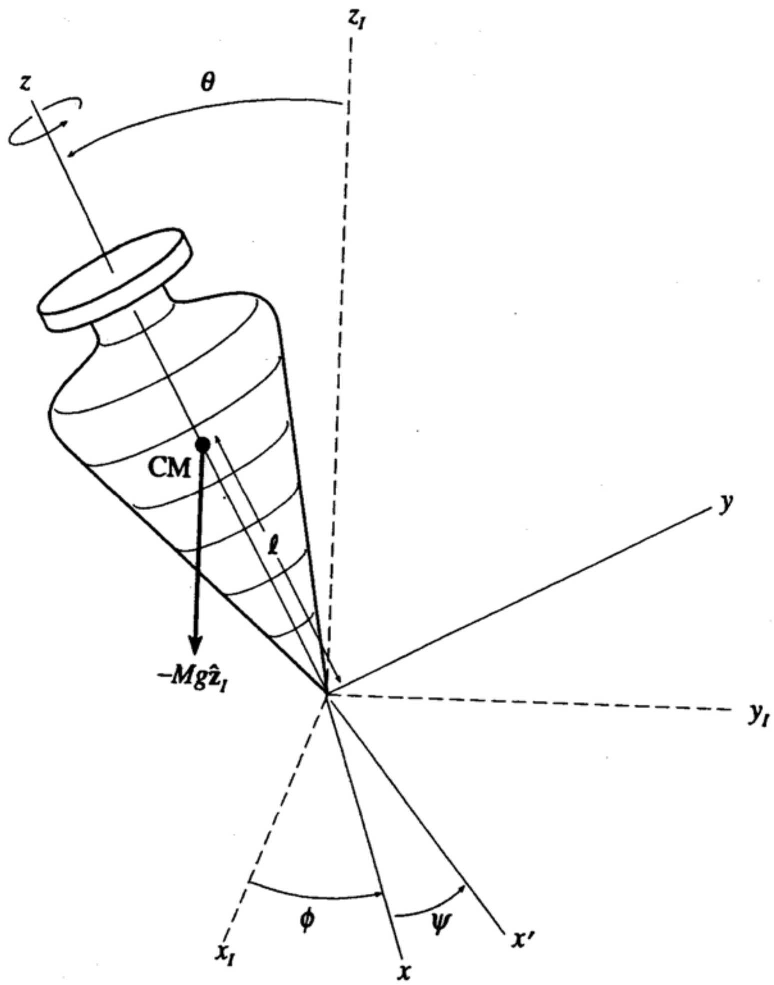
حيث $\hat{z}_1, \hat{z}, \hat{y}, \hat{x}$ متجهات واحدة على المحاور (z_1, z, y, x) على الترتيب.

نجد من الشكل (6.6)، أن:

$$\hat{z}_1 = \cos\theta\,\hat{z} + \sin\theta\,\hat{y} \qquad \textbf{(6.58)}$$

بالتعويض في المعادلة (6.57)، نحصل على:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{x} + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{y} + \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)\hat{z} \qquad \textbf{(6.59)}$$



الشكل (6.7): الحركة الدورانية لدوامة

ينتج من تناظر الدوامة بالنسبة للمحور z أن عزوم العطالة $I_{xx} = I_{yy} = I$ تكون متساوية بالنسبة إلى أي مجموعة محاور إحداثية متعامدة في المستوى xy، وبالتالي فان العزم الزاوي للدوامة حول نقطة الأصل يعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{L} = I\,\dot{\theta}\,\hat{x} + I\,\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{y} + I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)\hat{z} \qquad \textbf{(6.60)}$$

حيث $I_{zz} = I_3$، بالاستفادة من عبارة السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ والعزم الزاوي $\vec{L}$، نجد أن طاقة الحركة الدورانية للدوامة بدلالة زوايا أولر تساوي إلى:

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{L} = \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2 \qquad \textbf{(6.61)}$$

وتعطى طاقة جهد الجاذبية الأرضية (الطاقة الكامنة) بالعلاقة:

$$\textbf{(6.62)}\ V = Mg\,l\cos\theta$$

حيث l المسافة من نقطة الأصل إلى مركز ثقل الدوامة، كما هو موضح على الشكل (6.7).

تعطى عندئذٍ دالة لاغرانج L بدلالة المتحولات $\dot{\psi}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \theta$ ولا تعتمد على ψ, θ، بالصورة:

$$L = T - v = \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right) - Mg\ell\cos\theta \qquad \textbf{(6.63)}$$

بما أن دالة لاغرانج لا تعتمد على θ و ψ، توجد إذن مركبتان محفوظتان للدفع المعمم (راجع الفصل الثاني)، تكون المركبة الأولى مساوية :

$$\textbf{(6.64)}\ p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right) \equiv I_3\omega_3$$

تكون بالتالي السرعة الزاوية ω_3 ثابتة باتجاه محور التناظر z ، وتعطى المركبة الثانية المحفوظة للدفع المعمم من العلاقة:

$$\textbf{(6.65)}\ p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I\dot{\phi}\sin^2\theta + I_3\omega_3\cos\theta$$

بما أن الزاوية ϕ تعتبر تكامل للحركة (ثابت للحركة)، ينتج أن $\dot{p}_\Phi = 0$، الأمر الذي يؤدي إلى المعادلة التالية:

$$\textbf{(6.66)}\ I\ddot{\phi}\sin\theta = \dot{\theta}\left(I_3\omega_3 - 2I\dot{\phi}\right)$$

ونحصل من معادلة لاغرانج $\dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta}$ على معادلة الحركة التالية:

$$\textbf{(6.67)}\ I\ddot{\theta} = \left(Mgl - I_3\omega_3\dot{\phi} + I\dot{\phi}^2\cos\theta\right)\sin\theta$$

يوافق الدوران بزاوية ϕ حركة المبادرة حول المحور z_1، وتوافق تغيرات الزاوية θ حركة الترنح. نستخدم معادلة الحركة الأخيرة لتحديد الشروط التي من أجلها تتحرك الدوامة حركة مبادرة صرفة، حيث تكون الزاوية θ ثابتة في حركة المبادرة الصرفة، وينتج من ذلك أن الطرف الأيمن في المعادلة (6.66)، يساوي صفراً. نجد من حل المعادلة (6.67). من أجل $\dot{\phi}$ بدلالة الزاوية θ أن:

$$\textbf{(6.68)}\quad \dot{\phi} = \frac{I_3\omega_3}{2I\cos\theta}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Mgl\,I\cos\theta}{I_3^2\omega_3^2}}\right)$$

لكي يكون لهذا الحل معنى فيزيائي يجب أن يكون المقدار تحت الجذر موجب، بما أن $\cos\theta > 0$ أثناء حركة الدوامة على الطاولة، فان سرعة البرم ω_3، يجب أن تحقق المتراجحة:

$$\omega_3 \geq \sqrt{\frac{4Mgl\,I\cos\theta}{I_3^2}} \qquad \textbf{(6.69)}$$

إذا كانت سرعة البرم أقل من هذه القيمة الصغرى، فإن حركة الدوامة تكون حركة مبادرة صرفة فقط، وعندما تكون سرعة البرم أكبر بكثير من القيمة الدنيا لـــ ω_3، يمكن في هذه الحالة بتقريب مقبول نشر الجذر التربيعي في المعادلة (6.68)، والاكتفاء بالحدين الأولين، نحصل على قيمتين تقريبيتين للجذر $\dot{\phi}$ يوافقان الحالتين التاليتين:

حركة مبادرة بطيئة:

$$\dot{\phi} = \frac{Mgl}{I_3\omega_3} \equiv \omega_P \qquad \textbf{(6.70)}$$

حركة مبادرة سريعة:

$$\dot{\phi} = \frac{I_3\omega_3}{I\cos\theta} \qquad \textbf{(6.71)}$$

تحقق حركة المبادرة البطيئة في الحل الأول الشرطين: $\dot{\phi} << \boldsymbol{\omega_3}$ ويكون متجه العزم الزاوي $\vec{L}$ تقريباً على امتداد المحور z، ويحقق في حركة المبادرة السريعة الحل الثاني الشرطين: $\dot{\phi} \approx \omega_3$ ويكون متجه العزم الزاوي $\vec{L}$ تقريباً

على امتداد المتجه z، وتتحقق أيضاً في هذه الحالة العلاقة $\mathbf{L\cos\theta \approx I_3\omega_3}$ و $\dot{\phi} \approx \dfrac{\mathbf{L}}{\mathbf{I}}$، وتساوي هذه القيمة التردد الزاوي ω_L لحركة دوامة حرة العلاقة (6.50)، ويكون الحل في حركة المبادرة السريعة حول محور عمودي مستقل عن قوة الجاذبية في الحالة الحدية $\mathbf{\lim\omega_3 >> (\omega_3)_{min}}$.

عندما تكون حركة برم الدوامة سريعة فان كلٍ من حركتي المبادرة والترنح تكون بطيئة، ويمكن إيجاد الحل التقريبي للحركة في هذه الحالة بإهمال الحد التربيعي للمشتق للزاويتين $\dot{\phi}$ و $\dot{\theta}$ في المعادلتين التفاضليتين (6.66)، (6.67)، فنحصل على:

$$\ddot{\phi}\sin\theta = \frac{I_3\omega_3}{I}\dot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} = \left(\frac{Mgl}{I} - \frac{I_3\omega_3}{I}\dot{\phi}\right)\sin\theta \qquad \mathbf{(6.72)}$$

بفرض أن:

$$\mathbf{(6.73)}\ \omega_L \equiv \frac{I_3\omega_3}{I}$$

يمكن كتابة المعادلتين السابقتين بالشكل:

$$\ddot{\phi}\sin\theta = \omega_L\dot{\theta} \qquad \mathbf{(6.74)}$$
$$\ddot{\theta} = \omega_L(\omega_P - \dot{\phi})\sin\theta \qquad \mathbf{(6.75)}$$

نفاضل المعادلة (6.74)، بالنسبة للزمن ونعوض في المعادلة (6.75)، نحصل على المعادلة الآتية:

$$\mathbf{(6.76)}\ \frac{d^2\dot{\phi}}{dt^2} + \omega_L^2\dot{\phi} = \omega_L^2\omega_P$$

حيث أهملنا الحد $(\dot{\phi}\dot{\theta})$لصغره، ويعطى حل المعادلة التفاضلية (6.76)، بالنسبة إلى $\dot{\phi}$ بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{(6.77)}\ \dot{\phi}(t) = \omega_P + a\cos(\omega_L t + \alpha)$$

بأخذ الشروط الابتدائية التالية:

$\dot{\phi} = \omega_0,\ \ \dot{\theta} = 0,\ \ \theta = \theta_0$ عندما t=0، نجد أن $\dot{\phi}_0 = 0$، و يصبح الحل في (6.76)، بالشكل التالي:

$$\textbf{(6.78)}\ \dot{\phi}(t)=\omega_P-(\omega_P-\omega_0)\cos\omega_L t$$

نكامل هذه المعادلة بالنسبة للزمن، نحصل على معادلة الحركة من أجل الزاوية $\phi(t)$ بالصورة:

$$\textbf{(6.79)}\quad \phi(t)=\omega_P t-\left(\frac{\omega_P-\omega_0}{\omega_L}\right)\sin\omega_L t$$

ولإيجاد الحل بالنسبة للزاوية θ، نعوض من المعادلة (6.78)، في المعادلة (6.74)، فنحصل على:

$$\textbf{(6.80)}\ \dot{\theta}=(\omega_P-\omega_0)\sin\omega_L t\sin\theta$$

بما أن $\boldsymbol{\omega_P}$ و $\boldsymbol{\omega_0}$ كميات صغيرة، يمكن بتقريب مقبول أن نضع $\sin\theta\approx\sin\theta_0$ في الطرف الأيمن من المعادلة (6.80)، و بإجراء التكامل، نحصل على الحل بالنسبة للزاوية θ، بالشكل التالي:

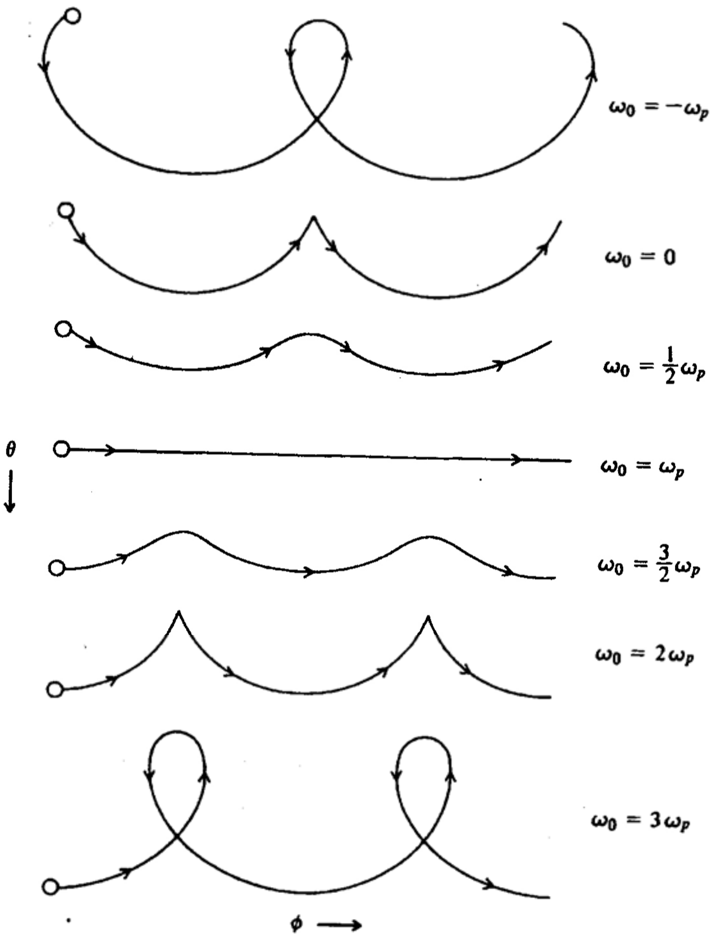
$$\theta(t)=\theta_0+\left(\frac{\omega_P-\omega_0}{\omega_L}\right)\sin\theta_0(1-\cos\omega_L t)\qquad\textbf{(6.81)}$$

تكمّل هذه المعادلة الحل الأساسي لمعادلة الحركة في حالة حركة مبادرة بطيئة و ترنح صغير.

يُظهِر حل المعادلة (6.75)، لحركة ترنح الدوامة، أن قيمة الزاوية $\theta(t)$ بين الحدين: θ_0 , $\theta_0+2\left[{(\omega_p-\omega_0)}/{\omega_p}\right]\sin\theta_0$. وتحدد إشارة المقدار $(\omega_p-\omega_0)$، القيمة العظمى والقيمة الصغرى للزاوية θ. وتتضمن حركة المبادرة في المعادلة (6.79)، مجموع حركتين، حركة جيبيه ترافقها حركة ترنح مركبة على مبادرة مستقرة. عندما يكون التردد الابتدائي لحركة المبادرة ω_0 مساوياً إلى ω_P، فإن حركة الدوامة تكون حركة مبادرة مستقرة بدون ترنح. يوضح الشكل (6.8)، منحنيات ترنح الدوامة بواسطة محاور تناظرها من أجل قيم ابتدائية مختلفة لـــ ω_0 مقابلة لقيمة واحدة للزاوية θ.

يعتبر ω_L في المعادلة (6.81)، تردد ترنح الدوامة. يتضح من المعادلتين (6.70) و(6.73)، أن ازدياد تردد البرم ω_3 يؤدي إلى ازدياد تردد

الترنح ω_L، بينما ينقص تردد المبادرة ω_P. غير أن سعة الترنح تتناسب عكسياً مع تردد الترنح ω_L، لذلك فأن ترنح الدوامة لا يكون ملحوظاً عندما تتحرك بسرعة برم كبيرة. عندما يكون برم (غزل) الدوامة سريعاً على سطح مجوف فإننا نسمع نغمة أزيز (طنين) بتردد مطابق لحركة الترنح.



الشكل (6.8): منحنيات الترنح من أجل قيم ابتدائية مختلفة لـــ ω_0 وقيمة واحدة لـــ θ

يمكن شرح ظاهرة ترنح الدوامة التي عرضت في المعادلات السابقة بطريقة بسيطة. يكون متجه العزم الزاوي $\vec{L}$ للدوامة على امتداد محور

تناظرها z في حالة حركة البرم السريعة، ونحصل من المعادلة (6.62)، على عزم قوة الجاذبية بالشكل التالي:

$$\textbf{(6.82)}\; \vec{M} = -\frac{dV}{d\theta}\hat{\theta} = Mgl\sin\theta\hat{x}$$

ويكون العزم $\vec{M}$ عمودياً على المحور z_1، ويسبب دوران الدوامة (مبادرة) حول اتجاه عمودي. يمكن حساب السرعة الزاوية لحركة المبادرة $\vec{\omega}_p = \omega_p\hat{z}_1$ من المطابقة بين المعادلتين التاليتين:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = -Mgl\sin\theta\hat{x}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_p x\vec{L} = \omega_p L(\hat{z}_1 x\hat{z})$$

حيث $\hat{z}_1 \times \hat{z} = -\hat{x}\sin\theta$ و $L \approx I_3\omega_3$، فإننا نحصل على التردد الزاوي المتوقع لحركة مبادرة مستقرة حول المحور العمودي المثبت z_1 بالشكل:

$$\textbf{(6.83)}\; \omega_p \approx \frac{mgl}{I_3\omega_3}$$

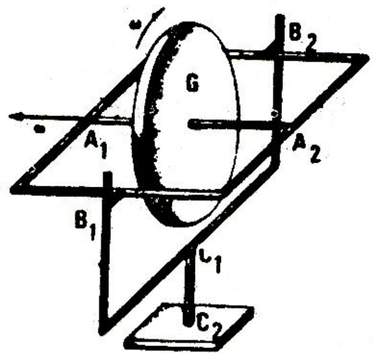
عندما تكون ω_3 كبيرة جداً، فان معدل التردد الزاوي ω_p لحركة المبادرة يكون صغيراً، ويكون بالتالي محور تناظر الدوامة ثابت تقريباً. إذا أعطيت الدوامة دفعة زهيدة، فإنها تحصل آنياً على عزم كمية حركة زاوية صغيرة $\Delta\vec{L}$ عمودية على المحور z، وتكون محصلة عزم كمية الحركة الزاوية الكلية مساوية إلى $\vec{\tilde{L}} \equiv \vec{L} + \Delta\vec{L}$، ويختلف اتجاه هذه المحصلة عن اتجاه محور التناظر Z بشكل زهيد جداً. تشبه الحركة الناتجة حركة دوامة حرة يدور محور تناظرها حول المحور $\vec{\tilde{L}}$ في دائرة صغيرة. يمكن إيجاد التردد الزاوي لهذه الحركة الدائرية من المعادلة (6.60)، ليكون مساوياً:

$$\omega_L = \frac{\vec{\tilde{L}}}{I} \approx \frac{I_3\omega_3}{I} \qquad \textbf{(6.84)}$$

تكون الحركة التامة لمحور التناظر تراكب لهذه الحركة الدائرية السريعة للدوامة حول المتجه $\vec{\tilde{L}}$ في مبادرة بطيئة للمتجه $\hat{L}$ حول الاتجاه العمودي.

50- الجيروسكوب: The gyroscope

يطلق اسم الجيروسكوب على أي جسم صلب يدور حول محوره التناظري بسرعة أكبر بكثير من سرعة دوران المحور نفسه حول أي محور آخر، ويعتبر أوضح مثال على الجيروسكوب الآلة ذات المفصل المتحرك الموضح رسمها التخطيطي على الشكل (6.9)، وتكون آلية عملها بالشكل التالي: إذا أدير القرص الداخلي بسرعة كبيرة حول محوره A_1A_2، فان الإطـــــار يدور حول المحور B_1B_2 الموجود في الإطار العمودي الذي يمكنه بدوره أن يدور حول المحور G_1G_2.



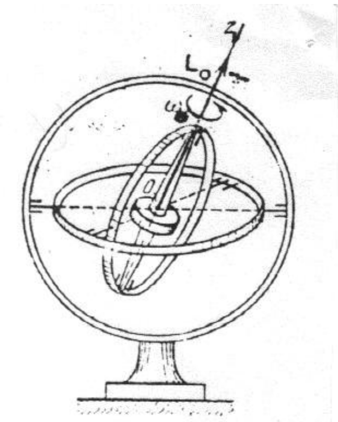
الشكل (6.9): الجيروسكوب

تدل هذه الحركة على أن للإطار الداخلي ثلاث درجات حرية وللإطار الوسطي درجتي حرية وللخارجي درجة حرية واحدة. غير أن الجيروسكوب مصمم بحيث يظل اتجاه محور الدوران بصفة عامة مثبتاً حتى عندما يكون الإطار الخارجي المتصل بالجسم حر الحركة في الفراغ، فعندما يدور القرص حول محوره بسرعة كبيرة يكون العزم الزاوي $\vec{L}$ كبيراً ومحمولاً على المحور A_1A_2. يعتبر الجيروسكوب مثالاً لجسم صلب يتحرك حركة دورانية (مغزلية)، وتكون إحدى نقطه (عادة مركز كتلته) مثبتة على محور تناظره، ويكون بالتالي عزم قوة الثقل $\vec{M}$ معدوماً، وينتج أن العزم الزاوي يكون ثابتاً مقداراً واتجاهاً، ويبقى اتجاه المحور A_1A_2 ثابتاً دوماً مهما كانت حركة الوسط الموجود فيه.

يستفاد من خاصة ثبات اتجاه محور الجيروسكوب في الفراغ في تطبيقات عديدة، وذلك في الأحوال التي تستلزم الاحتفاظ بالاتجاه (أو إتباع هدف معين)، مثل ملاحة وإرشاد السفن والطائرات والغواصات، والتحكم في حركة القذائف ....

51-تطبيقات:

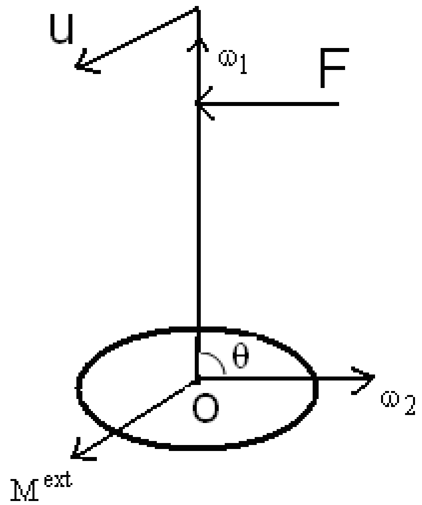
أ-الجيروسكوب الحر: ليكن الجيروسكوب الذي يتحرك تحت تأثير قوة وزنه فقط الشكل (6.10)، وبالتالي فإن $\vec{M}^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ وينتج من ذلك أن: $\vec{L} = \vec{L}_0$ ومن ثم $\omega = \omega_0$ أي أن الجيروسكوب يدور بسرعة زاوية ثابتة مقداراً واتجاهاً، ويستفاد من ذلك في صنع ما يسمى بالبوصلة الجيروسكوبية حيث يوجه محور الجيروسكوب باتجاه معين (باتجاه الشمال مثلاً) يبقى محافظاً عليه طالما بقيت محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه مساوية للصفر.



الشكل (6.10) جيروسكوب حر

ب-حركة محور الجيروسكوب عند تأثير قوة عليه:

بفرض أننا طبقنا على الجيروسكوب الموضح على الشكل (6.11)، قوة أفقية $\vec{F}$، ولندرس حركته. ينحرف في هذه الحالة محور الجيروسكوب باتجاه تأثيرها إذا كان ساكناً، ولكن كيف يتحرك تحت تأثير القوة $\vec{F}$ إذا كان يدور بسرعة زاوية $\vec{\omega}_1$ قبل تأثير القوة؟



الشكل (6.11)

تأثير قوة على محور جيرسكوب

للإجابة عن هذا السؤال نحسب عزم القوة $\vec{F}$ الذي سيكون متعامداً مع القوة $\vec{F}$ ويتجه من النقطة 0 إلى الناظر حسب قاعدة البزال المعروفة.

بفرض أن $\vec{u} = \vec{M}^{ext}$ فإن محور الجيروسكوب سيتحرك بالاتجاه نفسه أي كما هو مبين على الشكل (6.11)، وبالتالي فإن تأثير القوة الأفقية لا يؤدي إلى حركة الجيروسكوب باتجاهها.

والجدير بالذكر أنه عندما تؤثر على الجيروسكوب قوة يدوم تأثيرها قليلاً مع الزمن فإن محور الجيروسكوب لا يغير تقريباً من دورانه ولكنه يترنح قليلاً (حركة ترنحية) بحيث تتغير الزاوية θ حول وضعها الأولي قبل تأثير القوة. ولحساب السرعة الزاوية لمحور الدوران عند تأثير القوة $\vec{F}$ عليه نستخدم العلاقة التي تعطي سرعة دوران جسم صلب حول محور ثابت، حيث نجد:

$$\vec{v} = \vec{\omega}_2 \times \vec{L} = \vec{u} = \vec{M}^{ext} \qquad \textbf{(6.85)}$$

ومنه:

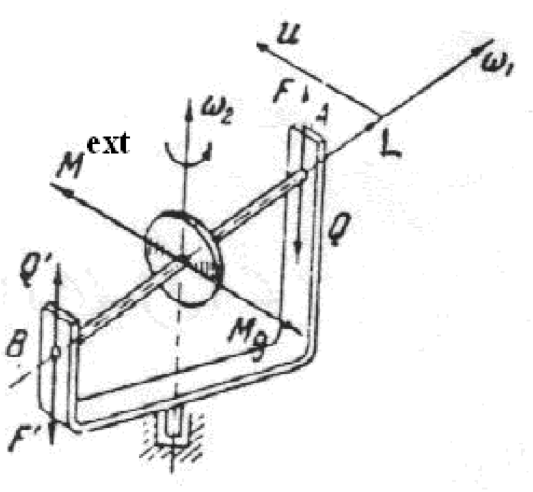
$$\omega = \frac{\left|\vec{M}^{ext}\right|}{L \sin\theta} \qquad \textbf{(6.86)}$$

حيث θ الزاوية بين $\vec{L}$ و $\vec{\omega}_2$.

جـ- كانت القوة المؤثرة على محور الجيروسكوب في المثالين السابقين معلومة، وقد حسبنا سرعة دوران المحور الناتجة من تأثير هذه القوة، ولكن هل يمكن معرفة قوة تؤثر على المحور وتسبب دوراناً ما معلوماً؟ (المسألة العكسية)

ليكن الجيروسكوب الذي يمكنه الدوران حول محور رأسي (شاقولي) بالإضافة إلى دورانه حول محور AB كما على الشكل (6.12)، ولنبحث عن القوى التي تسبب الدوران بسرعة زاوية $\vec{\omega}_2$. يعطى $\vec{M}^{ext}$ عزم القوى الخارجية المؤثرة على محور الدوران بالعلاقة (6.85)، ينتج من تلك العلاقة أن المتجه $\vec{M}^{ext}$ متعامد مع كلٍ من $\vec{\omega}_2$ و $\vec{L}$ بحيث تكون الثلاثية $\left(\vec{\omega}_2, \vec{L}, \vec{M}^{ext}\right)$ موجبة أي كما هو مبين على الشكل (6.12)، لكي يكون هذا العزم موجوداً يجب أن تؤثر على محور الجيروسكوب مزدوجة قوى $\left(\vec{Q}, \vec{Q}'\right)$ تؤثر على حلقتي تثبيته A و B، ووفقاً لقانون نيوتن الثالث ينبغي أن يؤثر محور الجيروسكوب على حلقتي التثبيت A و B بمزدوجة معاكسة $\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$، تسمى المزدوجة الجيروسكوبية، عزمها يساوي ويعاكس العزم $\vec{M}^{ext}$ كما هو موضح على الشكل (6.12)، ويكون:

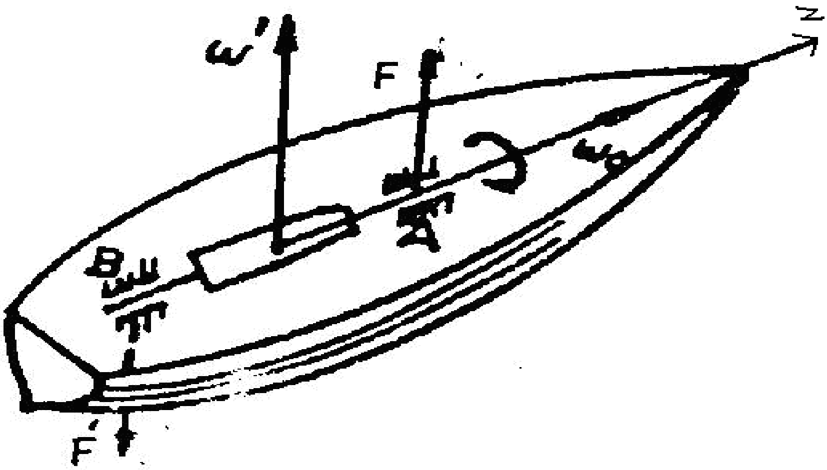
$$\vec{M}_g = -\vec{M}^{ext} = \vec{L} \times \vec{\omega}_2 = I\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \qquad \textbf{(6.87)}$$



الشكل (6.12)

ومن الجدير بالذكر أن البواخر والطائرات والسيارات تتعرض لهذه القوة عندما تغير مسارها. إذ أن محرك الباخرة على سبيل المثال يلعب دور جيروسكوب ضخم، وإذا فرضنا أن البعد بين نقطتي تثبيته يساوي l، فإن عزم المزدوجة $\left(\vec{F},\vec{F}'\right)$ المؤثرة على حلقتي تثبيت محور المحرك في A و B ، يعطى بالعلاقة (6.87)، ويمكن حساب $\vec{F}$ إذا فرضنا أن: $\vec{\omega}' \perp \vec{\omega}_0$ وذلك كما على الشكل (6.13)، حيث نجد:

$$lF = lF' = I\omega_O\omega' \Rightarrow F = \frac{I\omega_0\omega'}{l} \qquad \textbf{(6.88)}$$



الشكل (6.13)

وقد تؤدي هذه القوة إذا لم تؤخذ بعين الاعتبار إلى تشوه حلقات تثبيت المحرك وبالتالي إلى تهديد سلامة الباخرة ككل، ولكي يقلل تأثيرها ينبغي أن تنعطف الباخرة بسرعة بطيئة (ω_2 صغيرة) وأن يكون l البعد بين حلقات تثبيت المحرك كبيراً. يبدو عندئذٍ من المعادلة (6.88)، أن F تكون صغيرة.

وهذا ما يراعى أثناء بناء البواخر وغيرها من وسائط النقل التي يلعب فيها المحرك دور الجيروسكوب.

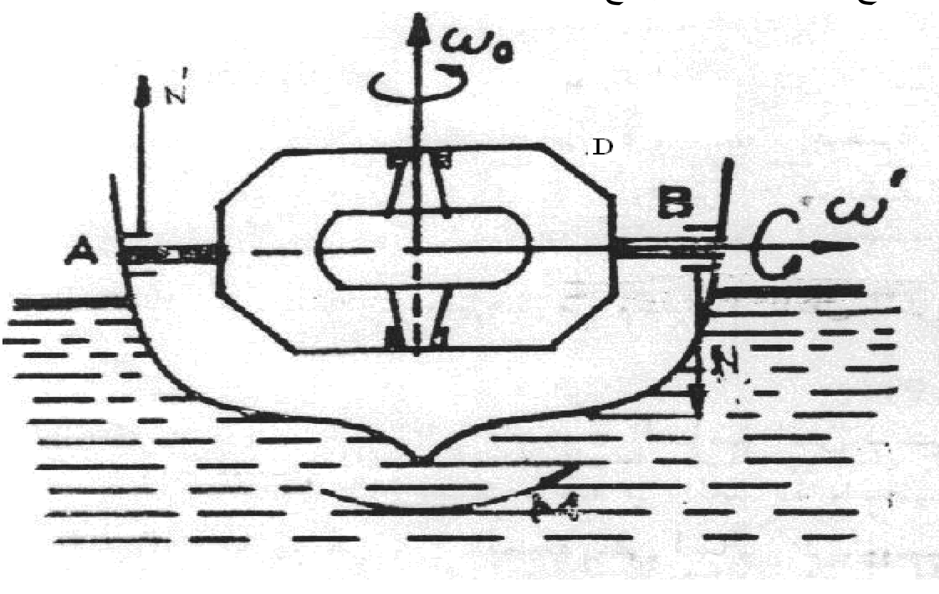
د- تطبيقات جيروسكوبية في التقنية: إن الميزات التي يتمتع بها الجيروسكوب تجعله يستعمل على نطاق واسع في الصناعة والتقنية، وقد ذكرنا

سابقاً البوصلة الجيروسكوبية المبنية على أساس الجيروسكوب الحر الذي يبقى محور دورانه ثابتاً إذا انعدمت القوى الخارجية المؤثرة عليه.

وتوجد مجالات كثيرة لتطبيقات الجيروسكوب، كالاستخدام في عمليات الملاحة البحرية وفي صناعة مبين الأفق الصناعي ومبين الدوران الجيروسكوبي ومنها ما يستخدم في الملاحة الجوية، فالطائرات الاتوماتيكية التي تطير بدون طيار والطائرات العمودية تحتوي على أجهزة جيروسكوبية. وسنخص في هذه الفقرة جهازين فقط:

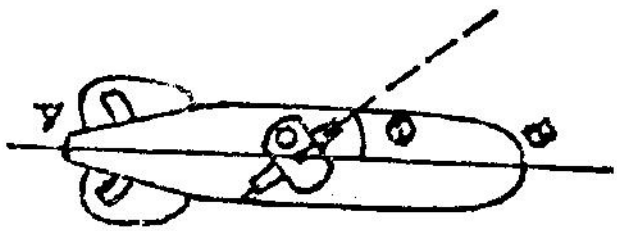
-**الجهاز المضاد للتأرجح:** وهو عبارة عن جيرسكوب ضخم يدور حول محور عمودي بسرعة زاوية كبيرة ω_0 وهو موضوع ضمن إطار يمكنه الدوران حول محور أفقي. ويعمل هذا الجهاز كما يلي:

عندما يؤثر عزم ما $\vec{M}$ على السفينة بفعل الأمواج البحرية مثلاً يبدأ المحرك المجهز بنظام خاص، بإدارة الاطار D بسرعة زاوية ω' مما يسبب ضغطاً جيروسكوبياً (N,N') يؤثر على حلقتي التثبيت A و B كما على الشكل (6.14)، بحيث يعاكس عزم هذا الضغط، العزم الخارجي $\vec{M}$ الناتج عن الأمواج وهذا يحد من تأرجح السفينة.

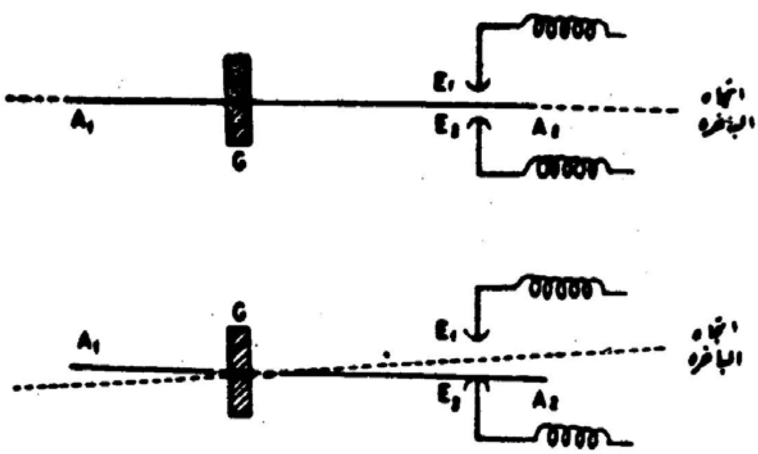


الشكل (6.14)

-جهاز اوبرى لتصحيح القذائف المنطلقة إلى أهدافها حيث يوجه محور جيروسكوب يدور بسرعة كبيرة نحو الهدف المراد تدميره، وعندما ينحرف الطوربيد عن مساره، بفعل أمواج البحر مثلاً، بزاوية θ شكل (6.15)، فإن محور الجيروسكوب يبقى ثابتاً بسبب انعدام القوى الخارجية المؤثرة عليه، وعندئذٍ يغلق المحور A_1A_2 دارة كهربائية خاصة كما هو مبين على الشكل (6.16)، تدور محركاً خاصاً، مثبتاً في جسم الطوربيد، يعمل على تصحيح المسار بحيث يتم التوجه من جديد باتجاه الهدف.



الشكل (6.15)



الشكل (6.16): دارة توجيه الجيروسكوب

Solved Examples أمثلة محلولة

1-استنتج معادلات عزم كمية الحركة الزاوية بدلالة عزوم ومضارب العطالة لمجموعة ميكانيكية.

الحل:

يعطى عزم كمية الحركة الزاوية لمجموعة ميكانيكية بالعلاقة التالية:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i m_i(\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i))$$

نجد باستخدام خواص الضرب المتجه أن:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \hat{r}_i) &= \vec{\omega}(\vec{r}_i . \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{\omega} . \vec{r}_i) \\
&= (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k})(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\
&\quad - (x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k})(\omega_i x_i + \omega_i y_i + \omega_i z_i) \\
&= \left[\omega_x (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i z_i\right]\vec{i} \\
&\quad + \left[\omega_y (x_i^2 + z_i^2) - \omega_x x_i y_i - \omega_z y_i z_i\right]\vec{j} \\
&\quad + \left[\omega_z (x_i^2 + y_i^2) - \omega_x x_i z_i - \omega_y y_i z_i\right]\vec{k}
\end{aligned}$$

بضرب طرفي هذه العلاقة بكتلة الجسيم رقم i والجمع على i ومساواة معاملات $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ مع L_x, L_y, L_z على الترتيب، نجد أن:

$$\begin{aligned}
L_x &= \left\{\sum_i^N m_i (y_i^2 + z_i^2)\right\}\omega_x + \left\{-\sum_i^N m_i x_i y_i\right\}\omega_y + \left\{-\sum_i^N m_i x_i z_i\right\}\omega_z \\
&= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_y &= \left\{-\sum_i^N m_i x_i y_i\right\}\omega_x + \left\{\sum_i^N m_i (x_i^2 + z_i^2)\right\}\omega_y + \left\{-\sum_i^N m_i y_i z_i\right\}\omega_z \\
&= I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z
\end{aligned}$$

$$L_z = \left\{-\sum_i^N m_i x_i z_i\right\}\omega_x + \left\{-\sum_i^N m_i y_i z_i\right\}\omega_y + \left\{\sum_i^N m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)\right\}\omega_z$$
$$= I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

يمكن الحصول على النتائج نفسها بالنسبة لكتلة متصلة التوزيع كثافتها σ، بأخذ التكامل بدلاً من الجمع، وذلك انطلاقاً من العلاقة:

$$\vec{L} = \int_R \sigma(\vec{r}\times\vec{v})d\tau = \int_R \sigma\{\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\}d\tau$$

2- يدور جسم صلب بسرعة زاوية ω فيه نقطة واحدة مثبتة. إذا كان عزم كمية الحركة الزاوية للجسم هو L، اثبت أن طاقة الحركة الدورانية للجسم تعطى بـــ:

أ- $T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L}$

ب- $T = \frac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z\right)$

الحل:

أ- نعلم أن طاقة الحركة تعطى بالعلاقة.

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i\left(\dot{\vec{r}}_i.\dot{\vec{r}}_i\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i^N m_i\{(\vec{\omega}\times\vec{r}_i).(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\} = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i\{\omega.[\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)]\}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{\omega}.\sum_i^N m_i\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) = \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{L}$$

ب-

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{L} = \frac{1}{2}\left(\omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}\right)\left(L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\omega_x L_x + \omega_y L_y + \omega_z L_z\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\omega_x\left(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z\right) + \omega_y\left(I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z\right)\right.$$
$$\left.\omega_z\left(I_{zx}\omega_z + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z\right)$$

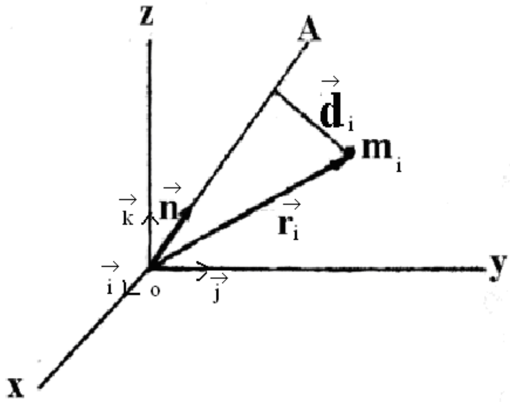
حيث استخدمنا خاصة التناظر $I_{xy}=I_{yx}, I_{xz}=I_{zx}, I_{yz}=I_{zy}$

3- بفرض أن عزوم ومضاريب العطالة لجسم صلب R بالنسبة لمجموعة إحداثيات xyz هي $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$. اثبت أن عزوم عطالة الجسم الصلب حول محور OA الذي يصنع زوايا α, β, γ مع المحاور x،y،z ، تعطى بالعلاقة:

$$I = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma + 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$
$$+2I_{xz}\cos\beta\cos\gamma + 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma$$

الحل: يعطى متجه الوحدة في اتجاه المحور A بشكل عام بالعلاقة:

$$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$



إذا كان $\vec{r}_i$ متجه موضع الكتلة m_i، يكون عزم العطالة حول المحور OAهو $m_i d_i^2$ حيث $d_i = |\vec{r}_i x \vec{n}|$

ينتج أن:

$$\vec{r}_i x \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = (y_i\cos\gamma - z_i\cos\beta)\vec{i}$$
$$+(z_i\cos\alpha - x_i\cos\gamma)\vec{j} + (x_i\cos\beta - y_i\cos\alpha)\vec{k}$$
$$\Rightarrow |\vec{r}_i \times \vec{n}|^2 = (y_i\cos\gamma - z_i\cos\beta)^2 + (z_i\cos\alpha - x_i\cos\gamma)^2$$
$$+(x_i\cos\beta - y_i\cos\alpha)^2$$
$$= (y_i^2 + z_i^2)\cos^2\alpha + (x_i^2 + z_i^2)\cos^2\beta + (x_i^2 + y_i^2)\cos^2\gamma$$
$$- 2x_i y_i\cos\alpha\cos\beta - 2x_i z_i\cos\alpha\cos\gamma - 2y_i z_i\cos\beta\cos\gamma$$

ويعطى العزم الكلي لجميع الكتل m_i بالعلاقة:

$$\begin{aligned} I=\sum_i m_i d_i^2 &= \left\{\sum_i m_i\left(y_i^2+z_i^2\right)\right\}\cos^2\alpha+\left\{\sum_i m_i\left(x_i^2+z_i^2\right)\right\}\cos^2\beta \\ &+\left\{\sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)\right\}\cos^2\gamma+2\left\{-\sum_i m_i x_i y_i\right\}\cos\alpha\cos\beta \\ &+2\left\{-\sum_i m_i x_i z_i\right\}\cos\alpha\cos\gamma+2\left\{-\sum_i m_i y_i z_i\right\}\cos\beta\cos\gamma \\ &= I_{xx}\cos^2\alpha+I_{yy}\cos^2\beta+I_{zz}\cos^2\gamma \\ &\quad +2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta+2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma+2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma \end{aligned}$$

4- أدرس حركة جسم صلب متناظر بالنسبة إلى محور، فيه نقطة واحدة مثبتة على المحور. علماً بأنه لا تؤثر على الجسم سوى قوة ثقله وقوة رد الفعل عند نقطة التثبيت.

الحل:

نختار محور التناظر منطبقاً على أحد المحاور الرئيسية، وليكن المحور z، عندئذٍ يكون $I_1=I_2$، وتصبح معادلات أولر بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} & I_1\dot{\omega}_1+\left(I_3-I_1\right)\omega_2\omega_3=0 \\ (1)\quad & I_1\dot{\omega}_2+\left(I_1-I_3\right)\omega_3\omega_1=0 \\ & I_3\dot{\omega}_3=0 \end{aligned}$$

نجد من المعادلة الأخيرة أن: $\omega_3=\text{const}=A$، وتصبح المعادلة الأولى والثانية بعد قسمتهما على I_1 بالصورة:

$$(2)\quad \begin{aligned} & \dot{\omega}_1+\left(\frac{\omega_3-I_1}{I_1}\right)A\omega_2=0 \\ & \dot{\omega}_2+\left(\frac{\omega_1-I_{31}}{I_1}\right)A\omega_1=0 \end{aligned}$$

بأخذ تفاضل المعادلة الثانية في (2)، بالنسبة للزمن t والاستفادة من المعادلة الأولى، يكون:

$$(3)\ddot{\omega}_2+\left(\frac{I_3-I_1}{I_1}\right)^2 A^2\omega_2=0$$

بفرض أن:

$$k=\left|\frac{I_3-I_1}{I_1}\right|A \qquad (4)$$

تصبح المعادلة (3)، بالشكل:

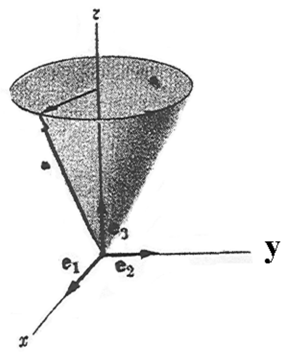
$$\ddot{\omega}_2+k^2\omega_2=0 \qquad (5)$$

تمثل المعادلة (5)، معادلة تفاضلية متجانسة، يعطى حلها بالعلاقة التالية:

$$\omega_2=B\cos kt+C\sin kt$$

حيث C, B ثوابت، نعتبر شروط ابتدائية هي: $\omega_2=0$ عندما $t=0$،
يصبح الحل السابق بالصورة:

$$(6)\omega_2=C\sin kt$$



ينتج عندئذٍ من المعادلة الثانية في (2)، أن:

$$(7)\omega_1=C\cos kt$$

وتكون بذلك السرعة الزاوية هي:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}&=\omega_1\vec{e}_1+\omega_2\vec{e}_2+\omega_3\vec{e}_3\\&=C\cos kt\,\vec{e}_1+C\sin kt\,\vec{e}_2+A\vec{e}_3\end{aligned} \qquad (8)$$

$\vec{e}_3,\vec{e}_2,\vec{e}_1$ متجهات وحدة على المحاور z, y, x على الترتيب.

وتعطى قيمة السرعة الزاوية بالعلاقة:

$$\omega = \sqrt{C^2 + A^2}$$

ينتج من هذه العلاقة أن السرعة الزاوية ثابتة في المقدار وبالتالي فإن الجسم يتحرك حركة مبادرة حول المحور z بتردد زاوي هو:

$$f = \frac{k}{2\pi} = \frac{|I_3 - I_1|}{2\pi} A \qquad (9)$$

5-ادرس حركة دوران الأرض حول نفسها باستخدام مخروط الفضاء ومخروط الجسم.

الحل:

ذكرنا سابقاً أن السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ وعزم كمية الحركة الزاوية $\vec{L}$ تعطيان بالعلاقتين التاليتين:

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{e}_1 + \omega_1\vec{e}_1 + \omega_1\vec{e}_1 = C(\cos kt\vec{e}_1 + \sin kt\vec{e}_2) + A\vec{e}_3$$

$$\vec{L} = I_1\omega_1\vec{e}_1 + I_2\omega_2\vec{e}_2 + I_3\omega_3\vec{e}_3 = I_1C(\cos kt\vec{e}_1 + \sin kt\vec{e}_2) + I_3A\vec{e}_3$$

بفرض أن θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{e}_3$ و $\vec{L}$، يكون عندئذٍ:

$$\vec{\omega}_3 = A\vec{e}_3 = \omega_3\vec{e}_3$$

ونحصل من عملية الضرب القياسي للمتجهين $\vec{\omega}$ و $\vec{L}$ على:

$$\vec{\omega}_3.\vec{L} = |\vec{\omega}_3|.|\vec{L}|\cos\theta = A\sqrt{I_1^2C^2 + I_3^2A^2}\ \cos\theta = I_3A^2$$

ينتج أن:

$$(1)\cos\theta = \frac{I_3A}{\sqrt{I_1^2C^2 + I_3^2A^2}}$$

وبفرض أن β هي الزاوية بين $\vec{\omega}_3$ و $\vec{\omega}$، نجد أن:

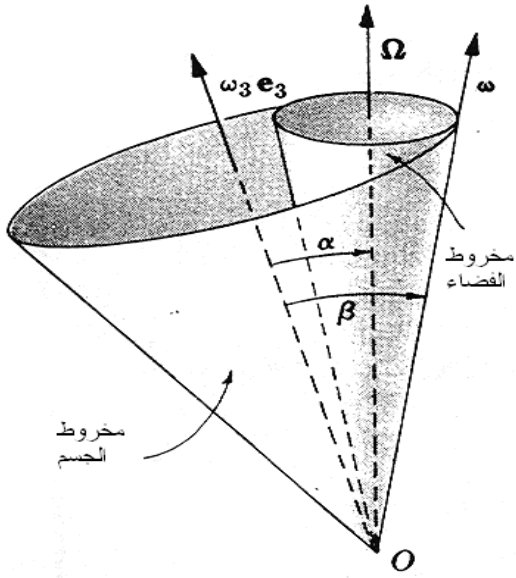
$$\vec{\omega}_3.\vec{\omega} = |\vec{\omega}_3|.|\vec{\omega}|\cos\beta = A\sqrt{C^2 + A^2}\cos\beta = A^2$$

أو بالشكل:

$$(2)\cos\beta = \frac{A}{\sqrt{C^2 + A^2}}$$

ينتج من المعادلتين (1) و (2)، أن:

$$(3)\sin\theta = \frac{I_1 C}{\sqrt{I_1^2 C^2 + I_3^2 A^2}} \ , \ \sin\beta = \frac{C}{\sqrt{C^2 + A^2}}$$



يكون بذلك:

$$\tan\theta = \frac{I_1 C}{I_3 A} \ , \ \tan\beta = \frac{C}{A} \qquad (4)$$

أو بالشكل:

$$\frac{\tan\theta}{\tan\beta} = \frac{I_1}{I_3} \qquad (5)$$

بفرض أن الأرض شبه كروية، يكون $I_1 < I_3$ وينتج أن: $\theta < \beta$. يعتبر المخروط الذي محوره في اتجاه محور كمية الحركة الزاوية $\vec{L}$ ثابتاً في الفراغ، ويسمى المخروط الفراغي، بينما يسمى المخروط الذي محوره $\vec{\omega}_3 = \omega_3 \vec{e}_3$ بالمخروط الجسمي ويعتبر كأنه مثبت على الأرض كما هو مبين على الشكل المرسوم. يتدحرج المخروط الجسمي على المخروط الفراغي ويحدد خط التلامس متجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$.

يمكن البرهان على أن المتجهات $\vec{\omega}, \vec{\omega}_3, \vec{L}$ تقع في مستوى واحد وذلك كما يلي:

$$\vec{\omega}_3 \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & A \\ I_1 C\cos kt & I_1 C\sin kt & I_3 A \end{vmatrix}$$

$$= -AICsinkt + ACcoskt$$

ونجد من حاصل الضرب المختلط التالي:

$$\vec{L}.(\vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}) =$$

$$(I_1 C\cos kt\vec{e}_1 + I_1 C\sin kt\vec{e}_2 + I_3 A\vec{e}_3).(-AI_1 C\sin kt\vec{e}_1 + AI_1 C\cos kt\vec{e}_2)$$

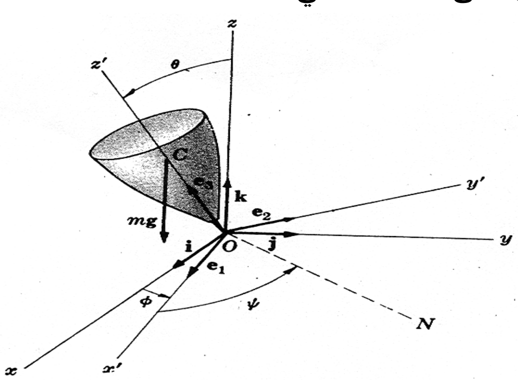
$$= -I_1^2 AC^2 \sin kt\cos kt + I_1^2 AC^2 \sin kt\cos kt = 0$$

ينتج أن المتجهات $\vec{\omega}, \vec{\omega}_3, \vec{L}$ تقع في مستوى واحد. يشاهد مراقب في نظام مثبت في الفضاء أن المتجه $\vec{\omega}$ يرسم مخروط الفضاء، بينما يرى مراقب موجود في نظام مثبت على الجسم ويتحرك معه أن المتجه $\vec{\omega}$ يرسم مخروط الفضاء.

يكون في حالة الأرض المخروط الفضائي داخل المخروط الجسمي كما هو موضح على الشكل السابق، لأن $I_1 < I_3$.

6- استنتج معادلات الحركة المغزلية لدوامة فيها نقطة مثبتة.

الحل: بفرض أن جملة الإحداثيات xyz عطالية، مثبت في النقطة 0، ونعتبر محاور جملة الإحداثيات $x'y'z'$ محاور رئيسية للدوامة، ونقطة أصلها نقطة التماس مع الأرض نفترضها نفس النقطة 0. تقع المحاور oy', oz', oz في مستوى واحد، تكون عندئذٍ المحاور oy, ox', ox واقعة في مستوى واحد وذلك كما هو مبين على الشكل التالي:



تعطى السرعة الزاوية لدوران محاور النظام $x'y'z'$ بالنسبة لمحاور جملة xyz بالعلاقة التالية:

$$(1)\ \vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3$$

وتعطى كمية الحركة الزاوية بالعلاقة:

$$\vec{L} = I_1 \dot{\theta}\, \vec{e}_1 + I_2 \dot{\phi}\, \vec{e}_2 + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta\right) \vec{e}_3$$

أو بالشكل:

$$\vec{L} = I_1 \dot{\theta}\, \vec{e}_1 + I_2 \dot{\phi}\, \vec{e}_2 + I_3 \left(\dot{\psi} + s\right) \vec{e}_3 \qquad (2)$$

حيث فرضنا أن: $\dot{\phi}\cos\theta = s$.

باستخدام علاقة اشتقاق متجه في جملة متحركة بالنسبة إلى جملة مثبتة، نجد أن:

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \times \vec{L} \qquad (3)$$

ينتج من استخدام المعادلات (1) و (2) و (3)، أن:

$$(4)\quad \begin{aligned} \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_F &= \{I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2 \omega_3 + I_3 \omega_2 S\} \vec{e}_1 \\ &+ \{I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1 \omega_3 - I_3 \omega_1 S\} \vec{e}_2 \\ &+ \{I_3 (\dot{\omega}_3 + \dot{s}) + (I_2 - I_1)\omega_1 \omega_2\} \vec{e}_3 \end{aligned}$$

ويعطى عزم دوران قوة الوزن (القوة الوحيدة التي لها عزم)، حول النقطة 0، بالعلاقة التالية:

$$\vec{M}_O = (l\, \vec{e}_3) \times (m\vec{g}) = (l\, \vec{e}_3) \times (-mg\vec{k})$$

نجد من الشكل أن متجه الوحدة $\vec{k}$ على المحور المثبت z يساوي إلى:

$$(5)\ \vec{k} = \cos\theta\, \vec{e}_3 + \sin\theta\, \vec{e}_2$$

بالتعويض في العلاقة السابقة، يعطى عزم الدوران بالشكل التالي:

$$(6)\ \vec{M}_O = -mgl\left(\vec{e}_3 \times \vec{k}\right) = mgl\sin\theta\, \vec{e}_1$$

باستخدام نظرية كمية الحركة الزاوية $\vec{M}_O = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_F$ واعتبار أن: $I_1 = I_2 = I$ بسبب التناظر.

نجد باستخدام المعادلتين (4) و (6)، أن:

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1)\omega_2\omega_3 + I_3\omega_2 s = mgl\sin\theta$$

$$(7)\ I_1\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 - I_3\omega_1 s = 0$$

$$I_3(\dot{\omega}_3 + \dot{s}) = 0$$

وهو المطلوب.

الفصل السابع

المـــرونـــة

خواص مرونة الأجسام الصلبة

ELASTIC PROPERTES OF SOLIDS

يعتقد البعض أن الأجسام الصلبة تحافظ على شكلها عند تأثير قوى خارجية عليها، بينما الحقيقة غير ذلك، حيث أن جميع المواد تتشوه عندما تخضع لقوى خارجية، فمن الممكن أن يتغير شكلها أو يتغير حجمها أو يتغير كل من الحجم والشكل عند تطبيق قوى خارجية عليها، بينما تقاوم القوى الداخلية هذا التشوه. سوف نناقش تشوه الأجسام الصلبة انطلاقاً من تعريف مفهومي الإجهاد والانفعال.

يعرف الإجهاد بأنه مقدار عددي يتناسب مع القوة التي تسبب التشوه، بعبارة أخرى نعرف الإجهاد بأنه النسبة بين القوة الخارجية F إلى وحدة مساحة A من الجسم التي تؤثر عليها هذه القوة، بينما يعرف الانفعال بأنه مقياس درجة التشوه، ويتناسب الانفعال مع الإجهاد ويسمى ثابت التناسب معامل المرونة، ويتعلق معامل المرونة بنوع المادة وبطبيعة التشوه، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\text{معامل المرونة} = \text{الإجهاد على الانفعال} \qquad \textbf{(7.1)}$$

نتعرّف على ثلاثة أنواع من التشوهات، ونعرّف معامل المرونة لكل نوع.

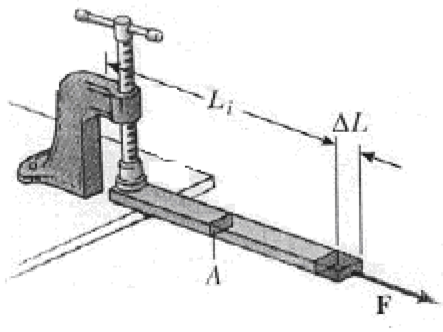
1. معامل يونغ (Young's modulus)، يقيس هذا المعامل مقاومة المواد الصلبة عند التغيير في طولها.

2. معامل القص (Shear modulus)، يقيس هذا المعامل حركة انزلاق مستويات الأجسام الصلبة فوق بعضها.

3. معامل تغير الحجم (Bulk modulus)، يقيس هذا المعامل مقاومة الأجسام الصلبة أو مقاومة السوائل لتغيير حجمها.

51- معامل يونغ: Young's Modulus

بفرض أن قضيباً طوله الأصلي L_i ومساحة مقطعه A. ثبت أحد طرفيه كما على الشكل (7.1) نطبق قوة عمودية على مقطعه العرضي من جهة طرفه الحر، تقاوم القوى الداخلية في القضيب التشوه. يتوازن القضيب عندما يصبح طوله L_f، حيث أن $L_f > L_i$ وتتوازن القوى الخارجية مع القوى الداخلية.



الشكل 7.1 زيادة طول قضيب مثبت من أحد طرفيه بالمقدار ΔL نتيجة تأثير قوة F

نوجد إجهاد الشد في القضيب وذلك من حساب نسبة شدة القوة الخارجية F إلى مساحة مقطعه A. يمكننا حساب انفعال الشد من حساب نسبة التغير في الطول ΔL إلى الطول الأصلي L_i (أي $\frac{\Delta L}{L_i}$ وتسمى هذه النسبة التشوه).

يعرف أخيراً معامل يونغ بأنه نسبة الإجهاد إلى الانفعال في الشد.

$$(7.2)\ Y = \frac{F/A}{\Delta L/L_i}$$ معامل يونغ

يستخدم معامل يونغ كنموذج لوصف إجهاد قضيب أو سلك رفيع تحت تأثير الشد أو الضغط، لأن الانفعال كما هو واضح كمية عددية بدون واحدة، وبالتالي فإن واحدة قياس معامل يونغ Y هي واحدة قياس القوة F لكل واحدة مساحة. يبين الجدول (7.1)، بعض القيم النموذجية للمعاملات الثلاث السابقة، هذا وتبين التجربة أنه:

أ- عند تطبيق قوة ثابتة على جسم صلب طويل، فإن التغير في الطول يتناسب طرداً مع الطول الأصلي.

ب-يتناسب الانفعال الناتج عن تأثير القوة طرداً مع مساحة المقطع.

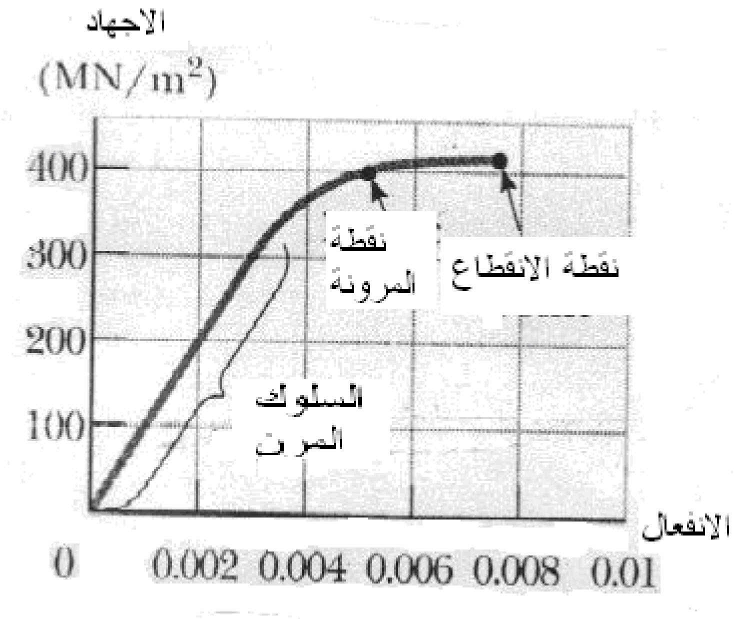
توضح المعادلة(7.2)، هذين الشرطين.

الجدول (7.1)، يظهر قيم معامل المرونة لبعض الأجسام:

المادة	معامل يونغ (N/m^2)	معامل القص	معامل تغير الحجم
تنغستن	$35x10^{10}$	$14x10^{10}$	$20x10^{10}$
فولاذ	$20x10^{10}$	$8.4x10^{10}$	$6x10^{10}$
نحاس	$11x10^{10}$	$4.2x10^{10}$	$14x10^{10}$
نحاس أصفر	$9.1x10^{10}$	$3.5x10^{10}$	$6.1x10^{10}$
ألمنيوم	$7x10^{10}$	$2.5x10^{10}$	$7x10^{10}$
زجاج	$(6.5-7.8)x10^{10}$	$(2.6-3.2)x10^{10}$	$(5-5.5)x10^{10}$
كوارتز	$5.6x10^{10}$	$2.6x10^{10}$	$(5-5.5)x10^{10}$
ماء	-	-	$0.21x10^{10}$
زئبق	-	–	$2.81x10^{10}$

52- حد المرونة: The elastic Limit

يعرف حد المرونة لمادة بأنه الإجهاد الأعظمي الذي يمكن تطبيقه على المادة قبل أن تبدأ بالتشوه.



الشكل (7.2)، الإجهاد بدلالة الانفعال لجسم صلب مرن.

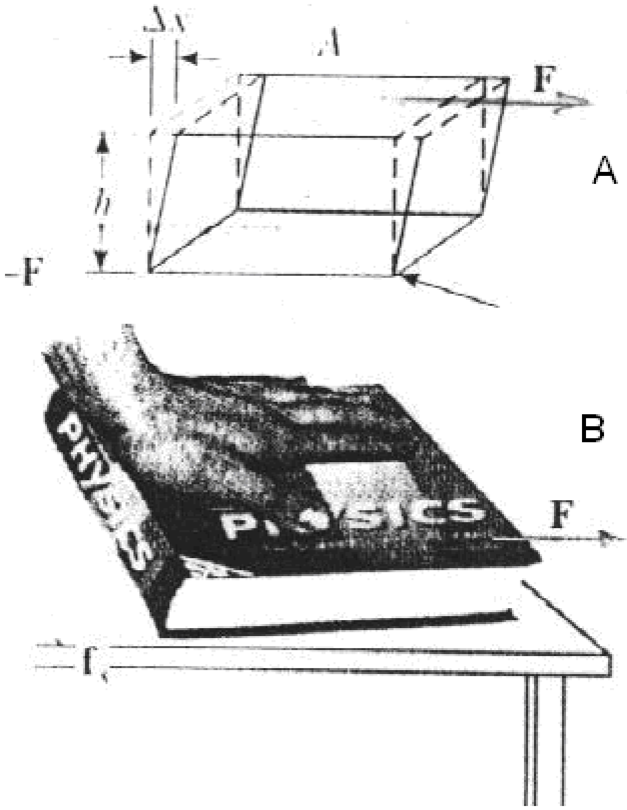
من الممكن تجاوز حد المرونة لمادة إذا طبقنا إجهاد كبير كفاية، ويبين الشكل (7.2)، أن المنحنى يمثل تزايد الإجهاد بتزايد الانفعال، وعندما يتجاوز الإجهاد حد المرونة، فإن الجسم يتشوه باستمرار ولا يعود إلى الشكل الأصلي حتى بعد زوال الإجهاد. وعند الاستمرار بزيادة الإجهاد فإن الجسم ينكسر أو يتحطم.

53- معامل القص : Shear Modulus

نذكر نوع آخر من التشوهات تحدث للأجسام التي تخضع لقوة مماسية على أحد أوجهها بينما يكون الوجه الآخر مثبت بواسطة قوة أخرى كما هو مبين على الشكل (7.3a)، يدعى الإجهاد في هذه الحالة إجهاد القص.

لا يصاحب إجهاد القص تغير في الحجم، ويعرف إجهاد القص بأنه نسبة القوة المماسية F إلى مساحة وجه القص A ، ويعرف انفعال القص بأنه النسبة

$\frac{\Delta x}{h}$، حيث Δx المسافة الأفقية التي يتحركها وجه القص (الوجه الخاضع للقوة F) و h ارتفاع الجسم.



الشكل: (7.3)

a) تشوه القص بواسطة قوتين متساويتين بالقيمة ومتعاكستين بالاتجاه تؤثران على وجهين متوازيين.b) كتاب تحت إجهاد القص.

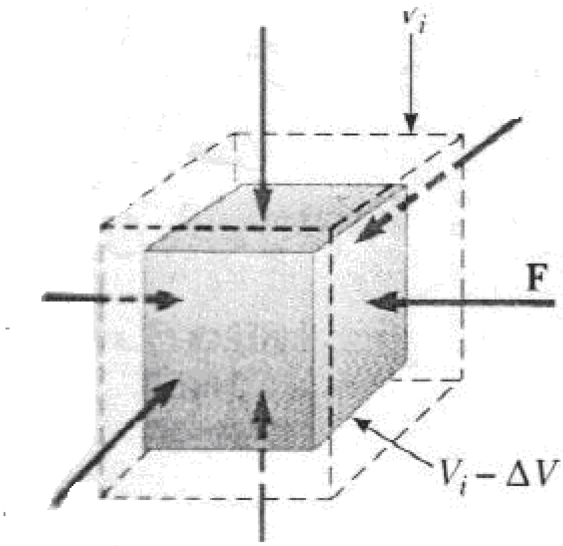
يعطى أخيراً معامل القص بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{F/A}{\Delta x/h} \qquad \textbf{(7.3)}$$

يظهر الجدول: (7.1)، بعض قيم معامل القص لبعض المواد ووحدة قياسه هي وحدة قياس القوة على وحدة قياس المساحة أي $\left(N/m^2\right)$.

54- **معامل تغير الحجم** :Bulk Modulus

يصف معامل تغير الحجم استجابة الجسم لتغير الضغط عندما يوضع في فراغ جزئي. بفرض أن قوى خارجية تؤثر بشكل منتظم على كل أوجه الجسم كما يظهر على الشكل (7.4)، يحدث مثل هذا التأثير المنتظم للقوى عندما يوضع الجسم في سائل أو مائع. يتغير حجم الجسم في هذه الحالة دون أن يرافق ذلك تغير على الشكل.



الشكل(7.4)، جسم صلب تحت ضغط منتظم، حيث يعاني تغيراً في الحجم دون أن يتغير شكله نتيجة تأثير قوى عمودية على وجوهه الستة.

يتحدد إجهاد الحجم (Volume Stress) بأنه ناتج قسمة المركبة العمودية للقوة F على المساحة A، وتدعى الكمية $P = \frac{F}{A}$ بالضغط،، فإذا تغير الضغط المؤثر على الجسم بالمقدار $\Delta P = \frac{\Delta F}{A}$، فإن حجم الجسم سيعاني تغيراً بالمقدار ΔV، ويساوي انفعال الحجم (Volume Strain) تغير الحجم ΔV مقسوماً على الحجم الابتدائي V_i، بالتعويض في المعادلة (7.1)، نحصل على تعريف معامل تغير الحجم بالصورة الآتية:

$$B = -\frac{\Delta F / A}{\Delta V / V_i} = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V_i} \qquad \textbf{(7.4)}$$

أدخلت إشارة السالب في هذا التعريف لتبقي العدد B موجباً، لأنه عند زيادة الضغط، فإن التغير في الضغط ΔP يكون موجباً، غير أن الحجم سيتناقص ويكون التغير في الحجم ΔV سالباً والعكس بالعكس. يتبين من الجدول (7.1)، إن للأجسام الصلبة والسائلة معامل حجم بينما ليس للسوائل معامل يونغ ومعامل قص لأنه لا يوجد للسوائل إجهاد قص أو إجهاد شد.

مثال1:

تطبق على كبل طوله 10 m، قوة شد مقدارها 940 N فيزداد طوله بمقدار 0.5 cm، المطلوب: إيجاد قطر الكبل، علماً أن معامل يونغ لمادة الكبل هو $Y = 20x10^{10}\ N/m^2$

الحل:

تعطى مساحة مقطع السلك من تعريف معامل يونغ.

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L / L_i} \Rightarrow A = \frac{F L_i}{Y \Delta L} = \frac{[940N(10m)]}{\left(20x10^{10}\ N/m^2\right)(0.005m)} = 9.4x10^{-6}\,m^2$$

بما أن مقطع الكبل دائرة، تكون مساحة مقطعه مساوية إلى:

$$A = \pi r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{9.4x10^{-6}\,m^2}{\pi}} = 1.7x10^{-3}\,m$$

يكون قطر الكبل:

$$d = 2r = 2\left(1.7x10^{-3}\,m\right) = 3.4x10^{-3}\,m = 3.4mm$$

مثال2:

توضع كرة صلبة من النحاس في هواء ضغطه $1x10^5\ N/m^2$ (الضغط الجوي النظامي). وتنزل في مياه البحر حتى عمق ضغطه $2x10^7\ N/m^2$. إذا كان حجم الكرة في الهواء يساوي إلى: $0.5\ m^3$، فما هو التغير الذي يطرأ على

حجم الكرة عندما تنزل في مياه البحر حتى العمق السابق؟ مع العلم أن معامل تغير حجم كرة النحاس هو $6.1x10^{10}\ N/m^2$

الحل:

نحصل من تعريف معامل تغير الحجم على:

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V_i}$$

بما أن الضغط النهائي على الكرة أكبر بكثير من الضغط الابتدائي، لذلك يمكن إهمال الضغط الابتدائي أمام الضغط النهائي، ويصبح التغير في الضغط هو:

$$\Delta p = p_f - p_i = p_f = 2x10^7\ N/m^2$$

ويكون التغير في الحجم:

$$\Delta V = -\frac{(0.5m^3)(2x10^{10}\ N/m^2)}{6.1x10^{10}\ N/m^2} = -1.6x10^{-4}\ m^3$$

تدل الإشارة السالبة على أن حجم الكرة قد تناقص.

المواد المرنة

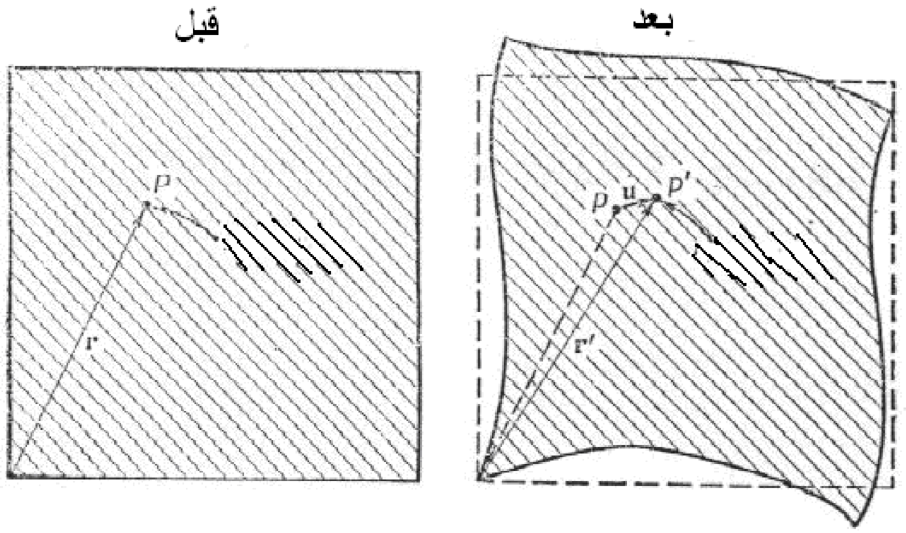
55- تنسور التشوه:

لقد نوهنا في فقرات سابقة عن إزاحة الأجسام المرنة عند تأثير قوى خارجية عليها، وسوف ندرس في هذا الفصل ما يحصل داخل المادة المرنة بشكل عام، لهذا نفرض أنه لدينا مادة غير مشوهة وضعت تحت جهد، ونراقب حركة جزء هلامي مشوب داخل المادة. بفرض أن الجزء الهلامي يقع في لحظة البدء في الموضع P الذي يتعين بالمتجه $\vec{r}(x,y,z)$، ينتقل بتأثير الجهد إلى الموضع P' الذي يتعين بالمتجه $\vec{r}'(x',y',z')$، كما هو مبين على الشكل (5.7).، نرمز لمتجه الإزاحة من النقطة P إلى النقطة P' بالرمز $\vec{u}$، فيكون:

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r} \qquad \textbf{(7.5)}$$

تعتمد الإزاحة $\vec{u}$ على الموضع P، أي أن الإزاحة $\vec{u}$ تعتبر دالة للمتجه $\vec{r}$ أو للإحداثيات x،y،z.

ندرس أولاً الحالة الخاصة التالية: عندما يكون التشوه لكل المادة ثابتاً، أي تشوهاً متجانساً.



الشكل(7.5): بقعة مشوبة في مادة غير مشوهة

بقعة هلامية مشوبة في مادة غير مشوهه في النقطة P من المكعب وفي P' بعد التشوه.

بفرض أنه لدينا عارضة متجانسة من مادة ما طبقنا عليها إجهاد بحيث يؤدي إلى زيادة منتظمة في الطول باتجاه المحور x كما على الشكل (7.6). يتناسب مقدار الإزاحة u_x طرداً مع x، ويمكن أن نكتب:

$$\frac{u_x}{x} = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

ونكتب الإزاحة u_x بالصورة:

$$u_x = e_{xx} x$$

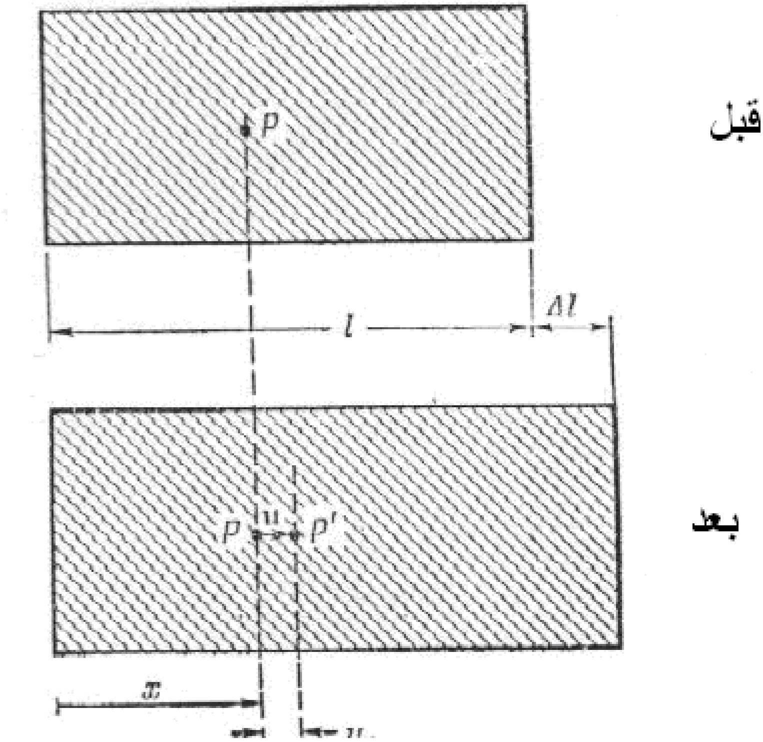
حيث أن $e_{xx} = \frac{\Delta\ell}{\ell}$ ثابت تناسب، وسنبين لاحقاً سبب كتابة دليلين أسفل ويمين الثابت e_{xx}.

إذا كان التشوه (تغير الشكل) غير متجانس، فإن العلاقة بين x و u_x لن تكون منتظمة وإنما تتغير من نقطة إلى أخرى، ويعطى في هذه الحالة ثابت التناسب بالعلاقة التالية:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \textbf{(7.6)}$$

يكون ثابت التناسب e_{xx} في هذه الحالة دالة لـــ x،y،z ، وتصف العلاقة السابقة التمدد الطولي في اتجاه المحور x، ويمكن كذلك أن يحدث التمدد في اتجاه المحورين y،z ويوصف ذلك بالعلاقتين المشابهتين التاليتين:

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad , \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad \textbf{(7.7)}$$



الشكل(7.6)

ازدياد الطول بشكل منتظم

بالإضافة لما سبق يجب أن نصف التشوه المرافق لانزياح الجسم، لذلك نفرض في البداية أنه لدينا كعوب (مكعب صغير جداً) غير خاضع لأي تشوه، وعند الضغط عليه يتحول إلى متوازي أضلاع

كما هو موضح على الشكل (7.6)، حيث، تتناسب الإزاحة في مثل هذا التشوه لكل جزيء باتجاه المحور x مع الاحداثي y لهذا الجزيء، أي أن:

$$u_x = \frac{\theta}{2} y \qquad \textbf{(7.8)}$$

وتتناسب الإزاحة باتجاه المحور y مع الاحداثي x:

$$u_y = \frac{\theta}{2} x \qquad \textbf{(7.9)}$$

ويمكن في مثل هذه الحالة وصف التشوه ألانزياحي بمساعدة المعادلات التالية:

$$u_x = e_{xy} y \quad , \quad u_y = e_{yx} x$$

حيث أن:

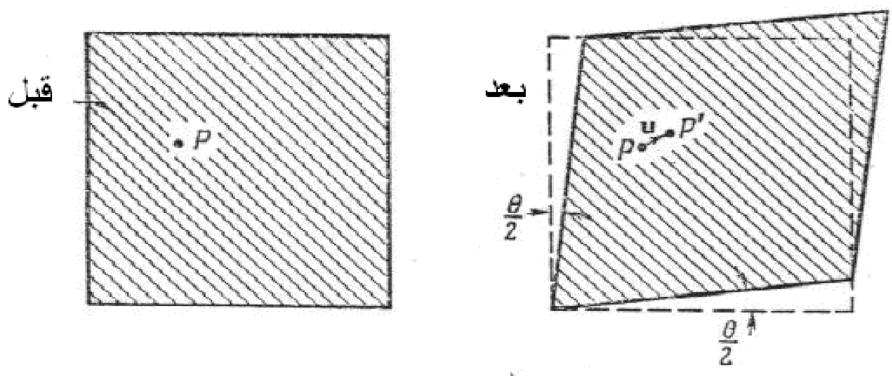
$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{\theta}{2}$$

يمكن أخيراً وصف التشوه الغير متجانس المرافق لانزياح من تعيين قيم e_{xy}، e_{yx} وذلك من العلاقتين:

$$e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad , \quad e_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \qquad \textbf{(7.10)}$$

نفرض الآن إن الإزاحتين u_x، u_y معينتان بالعلاقتين التاليتين:

$$u_x = \frac{\theta}{2} y \quad , \quad u_y = -\frac{\theta}{2} x$$



الشكل(7.7) تشوه متجانس مع انزياح

وهما مشابهتان للمعادلتين: (7.8)، (7.9)، مع الفارق أن إشارة u_y معاكسة. يعاني الكعوب في هذه الإزاحة دوران بزاوية مقدارها $\frac{\theta}{2}$ كما على الشكل (7.7)، ولا يحدث أي تشوه في هذه الحالة، وإنما يحدث دوران في الفضاء، ولا يحدث أي اضطراب للمادة كما أن الموضع النسبي للذرات لا

يتغير، وبالتالي يجب تصميم حالة بحيث يجب ألا يدخل الدوران الصرف في تشويه الإزاحة، هذا ممكن إذا كانت النسبتان $\partial u_y/\partial x$ ، $\partial u_x/\partial y$ متساويتان ومتعاكستان، ولا يوجد في هذه الحالة أي إجهاد، ويمكن في هذه الحالة إضافة التعريف التالي:

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

تتعدم النسبتان: $\partial u_y/\partial x$ ، $\partial u_x/\partial y$ في حالة الدوران الصرف ، وتتحقق بينهما في حالة الانتقال الصرف المساواة: $e_{xy}= e_{yx}$.

في الحالة العامة للتشويش، حيث تترافق الإزاحة إما بانضغاط أو بتمدد للمادة، فان التشوه يعرف بتحديد تسعة أعداد هي:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad \textbf{(7.11)}$$

$$.e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

تشكل هذه الأعداد مركبات تنسور التشوه، بما أن هذا التنسور متناظر(حسب التعريف يكون $e_{yx}=e_{xy}$)، فان الأعداد المختلفة هي ستة فقط. نكتب بدل المركبات x,y,z المركبات x_1, x_2, x_3 وبدل u_x, u_y, u_z المركبات u_1, u_2, u_3، يمكننا عندئذٍ أن نعبر عن عناصر التنسور e_{ij} بالعلاقة التالية:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \qquad \textbf{(7.12)}$$

يمكن أن يأخذ الدليلان i،j القيم 1,2,3.

عندما يكون تشوه الجسم متجانسا سواء أكان تمددا أم انضغاطاً للجسم، فإن كل قيم e_{ij} تكون ثابتة ونستطيع أن نكتب:

$$u_x = e_{xx}x + e_{xy}y + e_{xz}z \qquad \textbf{(7.13)}$$

(حيث اعتبرنا أن مبدأ الإحداثيات في النقطة التي ينعدم من أجلها المتجه $\vec{u}$). يعبر تنسور التشوه e_{ij} في هذه الحالات عن العلاقة بين متجه الإحداثيات $\vec{r}(x,y,z)$ ومتجه الإزاحة $\vec{u}(x,y,z)$.

إذا كان التشوه غير متجانس، فإن أي جزء هلامي يمكن أن يعاني تشوها، بالإضافة لذلك يمكن أن يحدث له دوران موضعي، وإذا كان التشويش صغيراً فإن:

$$\Delta u_i = \sum_i (e_{ij} - \omega_{ij}) \Delta x_j \qquad \textbf{(7.14)}$$

حيث ω_{ij} تنسور لا تناظري يصف الدوران، ويعرف بالعلاقة التالية:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \qquad \textbf{(7.15)}$$

سنقتصر في دراستنا على التشوه الذي يمكن وصفه بتنسور متناظر e_{ij}.

56- تنسور المرونة:

يلزم لوصف تشوه مادة، ربط القوى الداخلية مع الإجهاد في المادة. نفترض أن قانون هوك محقق من أجل أي جزء من المادة، أي أن التشوه يتناسب طرداً مع الإجهاد، ولقد عرفنا سابقاً تنسور الإجهاد S_{ij} بأنه المركبة i للقوة المؤثرة على وحدة مساحة عمودية على المحور j. ينص قانون هوك على أن كل مركبة للتنسور S_{ij} ترتبط خطياً مع كل مركبة للإجهاد. بما أن لكلٍ من S و l تسع مركبات، فإنه يلزم لوصف مرونة مادة 81=9×9 معامل، فإذا كانت المادة متجانسة فإن كل هذه المعاملات تكون ثوابتاً. نرمز لهذه الثوابت بالرمز C_{ijkl}، وتتعين بالعلاقة:

$$S_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} e_{kl} \qquad \textbf{(7.16)}$$

يمكن أن يأخذ كل رمز من الرموز i, j, k, l القيم 1،2،3. وأن المعاملات C_{ijkl} تربط تنسوراً بآخر، وهي تشكل أيضاً تنسوراً من الرتبة الرابعة، يسمى هذا التنسور تنسور المرونة.

بفرض أن كل المعاملات C_{ijkl} معلومة، وبفرض أننا طبقنا مجموعة قوى على جسم له شكل اختياري. تظهر في هذه الحالة كل أنواع تشوهات المادة، ومن الصعب تحديد انزياح الجسم، لكن إذا عرفنا نوع التشوه فإننا نستطيع من المعادلة (7.16)، أن نحسب الإجهاد وبالعكس، وأن الإجهاد والتشوه اللذان يظهران في أية نقطة من المادة يتعلقان بما يحدث لبقية أجزاء المادة.

تكون دراسة المسألة باستخدام مبدأ الطاقة أكثر سهولة، عندما تتناسب القوة المؤثرة F مع الإزاحة x، أي عندما تتحقق العلاقة F=kx، فإن العمل المقدم لإحداث إزاحة x يساوي $\frac{kx^2}{2}$.

وبشكل مماثل فإن الطاقة ω المختزنة في وحدة حجم اختيارية من المادة المشوهة تساوي:

$$\omega = \frac{1}{2}\sum_{ijkl} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \qquad \textbf{(7.17)}$$

وبالتالي فالعمل w المقدم لتشوه كامل المادة يساوي إلى تكامل ω على كامل الحجم:

$$w = \int \frac{1}{2}\sum_{ijkl} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl}\, dv \qquad \textbf{(7.18)}$$

يعبر هذا العمل عن طاقة الجهد الكامنة داخل المادة، وتكون قيمة هذه الطاقة صغرى عندما تكون المادة في حالة اتزان. انطلاقاً من ذلك يمكن حل مسألة تشوه الجسم من إيجاد الإزاحة $\vec{u}$ لكل الجسم عندما تكون قيمة العمل w صغرى، غير أننا لن ندخل في تفاصيل هذه المسألة.

قد يطرح السؤال التالي: ما هي الصفات النسبية لتنسور المرونة؟ من الواضح أن C_{ijkl} لا يحتوي على 81 معاملاً مختلفاً، لأن S_{ij} و e_{ij} تنسورين متناظرين كلٍ منهما يحتوي على ستة عناصر مختلفة، وبالتالي فإن C_{ijkl} يتألف من ستٍ وثلاثين مركبة مختلفة، ويكون عادةً العدد أقل من ذلك بكثير.

ندرس حالة خاصة مثال على ذلك بلورة مكعبة، حيث تعطى كثافة الطاقة ω لهذه البلورة بالعلاقة التالية:

$$\omega = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} C_{xxxx}e_{xx}^2 + C_{xxxy}e_{xx}e_{xy} + C_{xxxz}e_{xx}e_{xz} + C_{xxyx}e_{xx}e_{yx} + C_{xxyy}e_{xx}e_{yy} + ... + \\ + C_{yyyy}e_{yy}^2 + ... \end{Bmatrix}$$

(7.19)

أي أن مجموع الحدود هو 81 ولكن للبلورة المكعبة صفات تناظرية محددة، فعندما تدور البلورة المكعبة بزاوية تساوي 90° ، فإن خواص البلورة الفيزيائية لاتتغير، فمثلاً أثناء عملية السحب أو تبقى قساوة البلورة في اتجاه المحور x مثل قساوتها في اتجاه المحور y. ينتج من ذلك أنه إذا غيرنا مكان المحورين الاحداثيين x و y في المعادلة (7.19)، فإن قيمة الطاقة يجب أن لا تتغير، لذلك فإنه من أجل البلورة المكعبة يكون:

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = C_{zzzz} \qquad \textbf{(7.20)}$$

ويمكن كذلك أن نبين أن المركبات المماثلة لـــ C_{xxxy} يجب أن تساوي الصفر. تحقق البلورة المكعبة صفة التناظر عند الانعكاس بالنسبة إلى أي مستوى عمودي على محور من المحاور الإحداثية، وعندما نبدل y بـــ $-y$ يجب ألا يتغير شيء، ولكن هذا يؤدي إلى تغير e_{xy} إلى $-e_{xy}$ وتصبح الإزاحة في اتجاه المحور $-y$ بدلاً من الإزاحة في اتجاه المحورy. لكي لا تتغير الطاقة في هذه الحالة يجب تبديل C_{xxxy} إلى $-C_{xxxy}$ ، ولكن انعكاس البلورة لا يتغير كما ذكرنا سابقاً، لذلك فأن C_{xxxy} تبقى مساوية إلى $-C_{xxxy}$ ، وهذا غير ممكن إلا عندما يكونٍ كل منهما مساوياً للصفر.

قد يتبادر إلى الذهن أنه يمكن وضع $C_{yyyy}=0$، ولكن هذا غير ممكن لأن y تتكرر أربع مرات ، أي أن y تغير إشارتها السالبة أربع مرات مما يعطي دائماً إشارة موجبة الأمر ذاته عندما تتكرر y مرتين، وأن مركبات C في هاتين الحالتين يجب أن لا تساوي صفر، وإنما المركبات تساوي صفراً فقط عندما تتكرر فيها y عدداً فردياً من المرات (مرة أو ثلاث مرات). وبالتالي فإنه في البلورة المكعبة تكون C مختلفة عن الصفر عندما يكون الدليل مكرر عدداً زوجياً من المرات وتكون مساوية للصفر عندما يكون الدليل مكرراً عدداً فردياً

من المرات، وبنفس الطريقة يمكن مناقشة ذلك من أجل x و z. تكون إذن المركبات المختلفة عن الصفر هي المركبات التي لها الصيغة التالية:

C_{xxyy}...... ،C_{xyxy} ،C_{xyyx} ، وقد وجدنا أن تبديل كل x بـــ y أو العكس (أو z بـــ x الخ) في البلورة المكعبة، فان عدد المركبات لا يتغير وهذا يعني أنه توجد ثلاث إمكانيات مغايرة للصفر.

$$\begin{aligned} &C_{xxxx}\left(=C_{yyyy}=C_{zzzz}\right)\\ &C_{xxyy}\left(=C_{yyxx}=C_{xxzz}=....\right)\\ &C_{xyxy}\left(=C_{yxyx}=C_{xzxz}=....\right)\end{aligned} \qquad \textbf{(7.21)}$$

تعطى بالتالي كثافة الطاقة في البلورة المكعبة بالعلاقة التالية:

$$\textbf{(7.22)}\ \omega=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} C_{xxxx}\left(e_{xx}^2+e_{yy}^2+e_{zz}^2\right)+2C_{xxyy}\left(e_{xx}e_{yy}+e_{yyzz}+e_{zz}e_{xx}\right)\\ +4C_{xyxy}\left(e_{xy}^2+e_{yz}^2+e_{zx}^2\right)\end{Bmatrix}$$

وفي المواد المتجانسة (إيزوتروبية) غير البلورية، يجب أن يبقى عدد C نفسه كيفما تم اختيار محاور الإحداثيات، وتوجد في هذه الحالة علاقة أخرى بين المعاملات C :

$$C_{xxxx}=C_{xxyy}+C_{xyxy} \qquad \textbf{(7.23)}$$

يمكن ملاحظة ذلك من المعالجة التالية: يجب أن يرتبط تنسور الإجهاد S_{ij} مع e_{ij} بطريقة تجعل هذا الارتباط لا يعتمد على اتجاه المحاور الإحداثية، أي أن الارتباط هو ارتباط عددي. يمكن مثلاً الحصول على S_{ij} من e_{ij} وذلك من ضرب e_{ij} بعدد ثابت، فنحصل على قانون هوك $S_{ij}=\text{const}\times e_{ij}$، ولكن هذه العلاقة غير دقيقة تماماً، وإنما يمكن أن نلحق تنسور الواحدة δ_{ij} مضروباً عددياً بعلاقة مرتبطة خطية مع e_{ij}، وأن التعبير الجبري الثابت والخطي لـــ e هو $\sum e_{jj}$، (مشابه للتعبير $x^2+y^2+z^2$ يعتبر مقداراً عددياً).

تعطى عندئذٍ المعادلة العامة التي تربط بين التنسور S_{ij} و e_{ij} لمادة ايزوتروبية (متجانسة) بالعلاقة:

$$S_{ij}=2\mu e_{ij}+\lambda\left(\sum_k e_{kk}\right)\delta_{ij} \qquad \textbf{(7.24)}$$

تسمى الثوابت μ و λ ثوابت لاوي للمرونة. ينتج من مقارنة المعادلتين (7.24) و (7.16)، أن:

$$\begin{aligned} C_{xxyy} &= \lambda \\ C_{xyxy} &= 2\mu \\ C_{xxxx} &= 2\mu + \lambda \end{aligned} \tag{7.25}$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن العلاقة (7.23)، صحيحة. يتضح أن معامل مرونة مادة متجانسة يمكن التعبير عنه بواسطة ثابتي مرونة.

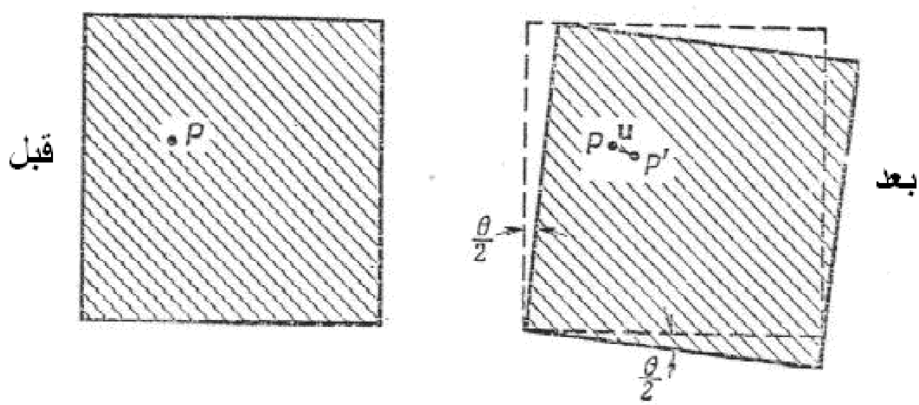
يمكن التعبير عن المعاملات C بواسطة ثابتين كيفيين من ثوابت المرونة التي مرت سابقاً، مثال على ذلك باستخدام معامل يونغ Y ونسبة بواصون σ، يكون:

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= \frac{Y}{1+\sigma}\left(1+\frac{\sigma}{1-2\sigma}\right) \\ C_{xxyy} &= \frac{Y}{1+\sigma}\left(\frac{\sigma}{1-2\sigma}\right) \\ C_{xyxy} &= \frac{Y}{1+\sigma} \end{aligned} \tag{7.26}$$

تعرف نسبة بواصون σ من العلاقة التي تربط بين القوة والاستطالة. عندما يخضع جسم على شكل متوازي مستطيلات إلى قوى شد على امتداد احد أبعاده (على امتداد الطول l مثلاً)، فإنه يستطيل بالمقدار Δl، وفي نفس الوقت ينضغط الجسم وفق البعدين الآخرين كما هو موضح على الشكل (7.8)، وتتحقق العلاقة التالية:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma\frac{\Delta \ell}{\ell}$$

حيث ℓ و h و d أبعاد متوازي المستطيلات، ويسمى الثابت σ نسبة بواصون، وهذا العدد موجب الإشارة وقيمته العددية أقل من $\frac{1}{2}$.



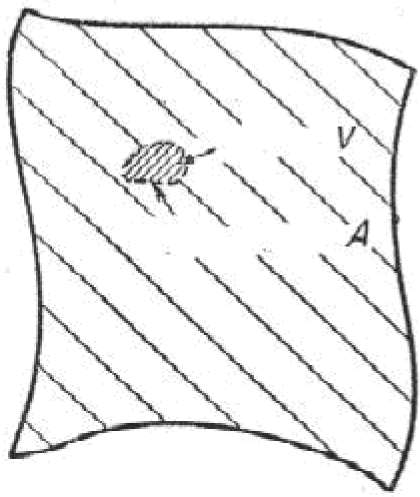
الشكل(7.8)

استطالة لوح على شكل متوازي مستطيلات تحت تأثير قوة منتظمة.

57- الحركة في جسم المرن:

أشرنا سابقاً أن الإجهاد داخل الجسم المرن المتوازن، يتوزع بحيث تكون قيمة الطاقة صغرى. ندرس الحالة التي تكون فيها القوى الداخلية غير متزنة، لذلك نأخذ جزءاً صغيراً من داخل المادة مساحته الخارجية تساوي A، كما هو مبين على الشكل (7.9). إذا كان هذا الجزء في حالة اتزان، فإن $\vec{F}$ مجموع القوى المؤثرة عليه يجب أن يساوي الصفر. يمكن اعتبار أن هذه القوى مكونة من جزأين، جزء ناتج عن تأثير القوى الداخلية F_{int}، وجزء ناتج عن تأثير القوى الخارجية مثل قوة الجاذبية، التي تؤثر عن بعد على جزء المادة، ويرمز لعنصر القوة الخارجية المؤثرة على وحدة الحجم بالرمز f_{ext}. يمكن إيجاد القوة الخارجية الكلية F_{ext} من حساب تكامل للقوة f_{ext} المؤثرة على عنصر الحجم dv وذلك على كامل حجم الجزء المأخوذ من المادة.

$$F_{ext} = \int f_{ext} dv \qquad \textbf{(7.27)}$$



الشكل(7.9)، عنصر حجم v سطحه A

تتعادل القوة الخارجية F_{ext} مع القوة الداخلية F_{int} في حالة الاتزان، وعندما يكون جزء المادة في حالة عدم اتزان، فإن مجموع القوتين الداخلية والخارجية يكون مساوياً إلى كتلة الجسم في تسارعه:

$$\vec{F}_{ext} + \vec{F}_{in} = \int_V \rho \ddot{\vec{r}}\, dv \qquad \textbf{(7.28)}$$

حيث ρ الكثافة الحجمية للجسم، $\ddot{r}$ تسارعه. يمكن الاستفادة من المعادلة (7.27). في كتابة المعادلة (7.28)، بالصورة التالية:

$$\vec{F}_{in} = \int_V \left(-\vec{f}_{ext} + \rho \ddot{\vec{r}}\right) dv \qquad \textbf{(7.29)}$$

بفرض أن:

$$\vec{f} = -\vec{f}_{ext} + \rho \ddot{\vec{r}} \qquad \textbf{(7.30)}$$

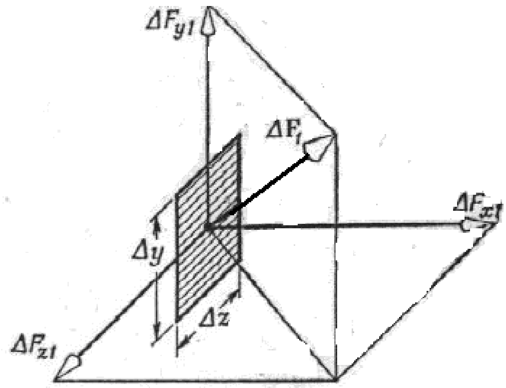
يمكن عندئذٍ كتابة المعادلة (7.29)، بالصورة التالية:

$$\vec{F}_{in} = \int_v \vec{f} dv \qquad \textbf{(7.31)}$$

تعتمد قيمة القوة الداخلية F_{in} على الإجهاد في المادة. إذا كان S_{ij} تنسور الإجهاد،الذي يمكن تعريفه باختصار على الشكل التالي:

نأخذ مقطع من المادة عمودي على المحور x ، ونحلل القوة $\Delta\vec{F}_1$ المؤثرة على هذا المقطع إلى مركباتها $\Delta F_{x1}, \Delta F_{y1}, \Delta F_{z1}$ كما هو مبين على الشكل (7.10)، تسمى نسبة هذه القوى إلى $\Delta y \Delta z$ بـــ s_{xx}, s_{yx}, s_{zx}. مثلاً:

$$s_{yx} = \frac{\Delta F_{y1}}{\Delta y \Delta z}$$



الشكل (7.10) القوة ΔF_1 المؤثرة على عنصر المساحة $\Delta y \Delta z$ العمودي على المحور x، ومركبات هذه القوة $\Delta F_{x1}, \Delta F_{y1}, \Delta F_{z1}$ على المحاور الإحداثية.

يرمز الدليل الأول y إلى اتجاه مركبة القوة، ويرمز الدليل الثاني x إلى اتجاه الناظم على المستوى، ويمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$s_{yx} = \frac{\Delta F_{y1}}{\Delta a_x}$$

حيث $\Delta a_x = \Delta y \Delta z$ عنصر مساحة عمودي على المحور x، وهكذا بالنسبة لبقية الاتجاهات.

بعد تعريف تنسور الإجهاد يمكن حساب القوة الداخلية كما يلي:

بفرض أن: dF_x مركبة القوة على المحور x تؤثر على عنصر المساحة da، فأنها تعطى بالعلاقة التالية:

$$dF_x = (S_{xx} n_x + S_{xy} n_y + S_{zx} n_z) da \qquad \textbf{(7.32)}$$

حيث $\vec{n}$ متجه عمودي على عنصر السطح da. يمكن في هذه الحالة حساب القوة الداخلية $\vec{F}_{in}$ المؤثرة على جزء المادة باتجاه المحور x من حساب التكامل لعنصر القوة dF_x بالنسبة لكل السطح A وذلك بالتعويض من المعادلة (7.32)، في المعادلة (7.31)، وإجراء التكامل على كامل السطح.

$$\int_A \left(S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z\right)da = \int_v f_x dv \qquad \textbf{(7.33)}$$

تربط هذه المعادلة العلاقة بين التكامل على سطح والتكامل على حجم، وتذكرنا هذه العلاقة بقوانين الكهرباء. فإذا لم نأخذ بعين الاعتبار إشارة x في الطرف الأيسر وذلك بالنسبة لكل مركبات S في المعادلة (7.33)، فإن ما داخل التكامل يؤول إلى ضرب المتجهين $\left(\vec{S}.\vec{n}\right)$، ويساوي هذا الضرب إلى تدفق المتجه $\vec{S}$ خلال الحجم V. يمكن باستخدام نظرية غاوص، كتابة التدفق في الطرف الأيسر من المعادلة (7.33)، كتكامل حجمي لتفاضل S، وهذا محقق بغض النظر عن وجود الدليل x لأن نظرية غاوص هي نظرية رياضية، وبناءً على ذلك تكتب المعادلة (7.33)، بالصورة:

$$\int_v \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z}\right)dv = \int_v f_x dv \qquad \textbf{(7.34)}$$

بإهمال عملية التكامل في الطرفين بالنسبة للحجم، نستطيع كتابة معادلة تفاضلية بالنسبة إلى أي مركبة لـــ $\vec{f}$ بالصورة:

$$f_i = \sum_j \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} \qquad \textbf{(7.35)}$$

تربط هذه المعادلة بين القوة المؤثرة على وحدة الحجم مع تنسور الإجهاد S_{ij}.

إذا عرف متجه الإزاحة $\vec{u}$ فإنه يمكننا إيجاد التشوه e_{ij}، بعد ذلك نحسب الإجهاد من المعادلة (7.16) ، ثم نوجد من المعادلة (7.35)، كثافة القوة $\vec{f}$. نستطيع بمعرفة القوة $\vec{f}$ إيجاد التسارع $\ddot{\vec{r}}$ من المعادلة (7.30)، الذي يبين كيف تتغير الإزاحة داخل المادة. يتطلب هذا الحساب الحصول على مجموعة معادلات معقدة وصعبة لدراسة مرونة الجسم الصلب، لذلك نكتفي بإعطاء نتيجة

الحساب في المواد المتجانسة. إذا استخدمنا المعادلة (7.24)، لحساب S_{ij}، وكتبنا e_{ij} بالشكل $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ ، فإننا نحصل على المعادلة الاتجاهية التالية:

$$\vec{f}=(\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{u})+\mu\nabla^2\vec{u} \qquad \textbf{(7.36)}$$

يمكن كتابة الصيغة العامة للقوة $\vec{f}$ على الشكل:

$$\vec{f}=a\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{u})+b\nabla^2\vec{u}$$

وهذه الصيغة مكافئة للصيغة في المعادلة (7.36)، ولكن بثوابت محددة أخرى. قد يسأل القارئ لماذا لم يكتب حد ثالث $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{u}$ وهو متجه أيضاً؟ الجواب هو أننا نعلم أن ناتج ضرب $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{u}$يساوي إلى $\nabla^2\vec{u}-\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{u})$وهذا تركيب خطي لحدين موجودين في المعادلة السابقة، وبالتالي فإن ناتج الضرب المتجهي $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{u}$ لا يضيف شيئاً جديداً للمعادلة السابقة. بذلك نكون قد برهنا مرة ثانية أنه في المواد المتجانسة يوجد فقط ثابتي مرونة.

للحصول على معادلة حركة المادة، نساوي المعادلة (7.36)، بـــ $\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$، ونهمل القوى الحجمية مثل قوى الثقالة، فنحصل على:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{u})+\mu\nabla^2\vec{u} \qquad \textbf{(7.37)}$$

تبدو هذه المعادلة شبيهة للمعادلة الموجية التي تعرفنا عليها في الكهرطيسية مع فارق وحيد هو وجود حد إضافي يزيد هذه المعادلة صعوبة، ويكون الحل بالنسبة للمواد المتجانسة المرونة مشابهاً لحل المعادلة الموجية. نذكر أن أي متجه لحقل يمكن كتابته مجموع متجهين بحيث يكون تفرق الأول مساوياً للصفر ويكون دوار الثاني أيضاً صفراً، أي أن:

$$\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2 \qquad \textbf{(7.38)}$$

حيث:

$$(\vec{\nabla}.\vec{u}_1)=0 \quad , \quad \vec{\nabla}x\vec{u}_2=0 \qquad \textbf{(7.39)}$$

نحصل بالتعويض عن $\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2$ في المعادلة (7.37)، على:

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_1+u_2)=(\lambda+\mu)\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{u}_2)+\mu\nabla^2(\vec{u}_1+\vec{u}_2) \quad \textbf{(7.40)}$$

نستطيع بأخذ تفرق هذه المعادلة أن نتخلص من المتجه $\vec{u}_1$:

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{\nabla}.\vec{u}_2)=(\lambda+\mu)\nabla^2(\vec{\nabla}.\vec{u}_2)+\mu\vec{\nabla}.\nabla^2.\vec{u}_2$$

بما أن المؤثرين ∇ و ∇^2 تبادليين، نستطيع إخراج $\vec{\nabla}$ كمؤثر مشترك، فنحصل على المعادلة التالية:

$$\vec{\nabla}.\left\{\rho\frac{\partial^2\vec{u}_2}{\partial t^2}-(\lambda+2\mu)\nabla^2\vec{u}_2\right\}=0 \quad \textbf{(7.41)}$$

بما أن $\vec{\nabla}x\vec{u}_2$ يساوي صفر بالتعريف، فإن دوار ما داخل القوسين كذلك يساوي صفر، وبالتالي فإن المقدار بين القوسين بشكل متطابق يساوي الصفر، أي أن:

$$\rho\frac{\partial^2\vec{u}_2}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\nabla^2\vec{u}_2 \quad \textbf{(7.42)}$$

وهي معادلة موجية متجهة للأمواج المتحركة بسرعة $C_2=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$. بما أن دوار $\vec{u}_2$ يساوي صفراً، فإن هذه الأمواج لا تعتمد على الانتقال وإنما هي أمواج انضغاطية مثل الأمواج الصوتية.

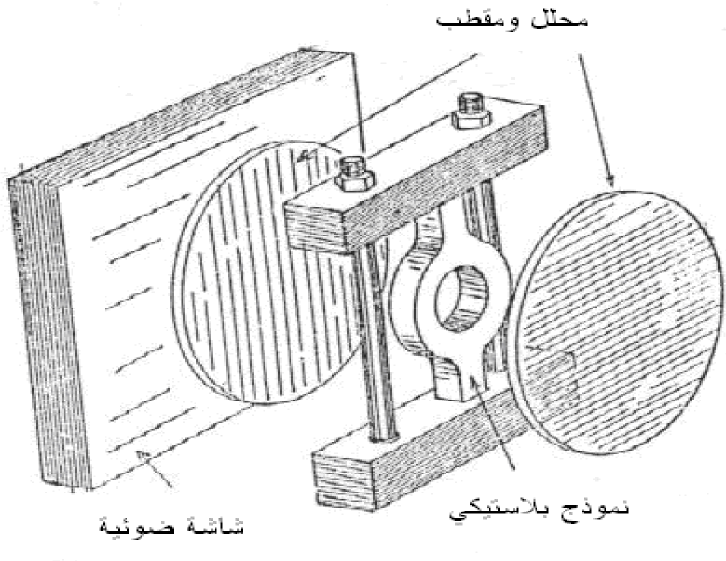
نجد بشكل مماثل إذا أخذنا دوار المعادلة (7.40)، أن المتجه $\vec{u}_1$ يحقق المعادلة التالية:

$$\rho\frac{\partial^2\vec{u}_1}{\partial t^2}=\mu\nabla^2\vec{u}_1 \quad \textbf{(7.43)}$$

وهي معادلة موجية للأمواج التي تنتشر بسرعة $C_2=\sqrt{\mu/\rho}$. بما أن $\vec{\nabla}.\vec{u}_1$ يساوي صفر، فإن تغير الإزاحة $\vec{u}_1$ لا يغير الكثافة ρ، وإنما يوافق المتجه $\vec{u}_1$ الانتقال العرضي للأمواج.

إذا أردنا حساب الإجهاد ألسكوني في مواد متجانسة، يجب حل المعادلة (7.36)، واعتبار أن $\vec{f}$ تساوي صفراً (أو تساوي القوى الحجمية السكونية الناتجة عن قوى الثقالة مثل ρg) في شروط محددة تتعلق بالقوى المؤثرة على

سطح جزء كبير من المادة، ولكن هذا ليس بالأمر السهل وذلك لسببين، الأول: المعادلة ذاتها غير سهلة، ثانياً: أشكال الأجسام المرنة التي ندرسها قد لا تكون منتظمة هندسياً. ففي الكهرباء مثلاً ندرس حلول معادلات مكسويل في أوساط هندسية سهلة، مثل وسط له شكل أسطواني، بينما في نظرية المرونة تتطلب الدراسة تطبيقها على أشكال أكثر تعقيداً مثل خطاف رافعة وعمود نقل الحركة في العربات وعمود المحركات التوربينية.............وتحل مثل هذه المسائل في معظم الأحيان بطريقة عددية، وذلك باستخدام مبدأ الفعل الأصغري للطاقة، وندرس طريقة أخرى نستخدم فيها نماذج مواد، ثم نقيس الإجهاد الداخلي تجريبياً باستخدام الاستقطاب الضوئي.

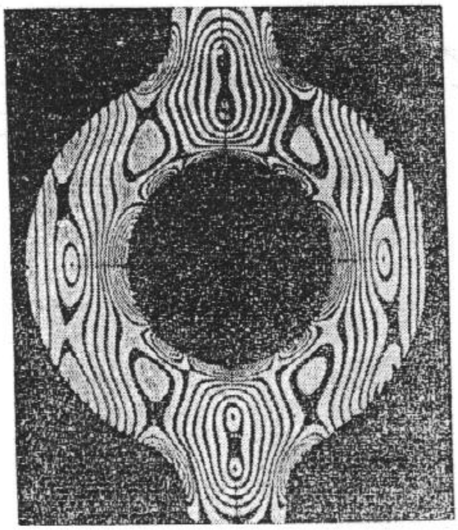


الشكل (7.11)

قياس الإجهاد الداخلي باستخدام الاستقطاب الضوئي

وتتلخص هذه الطريقة بالآتي:

عندما نعرض لإجهاد قطعة من مادة مرنة متجانسة مثل قطعة زجاج عضوي شفاف، فإنه يظهر فيها نوعان من الأشعة المنكسرة.



الشكل (7.12)

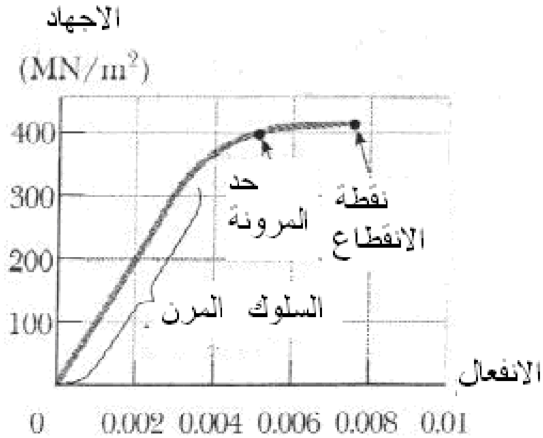
إجهاد مادة بلاستيكية بين قضيبين متقابلين

إذا نفذ عبر البلاستيك ضوء مستقطب، فإن مستوى الاستقطاب يدور بزاوية قيمتها تعتمد على الإجهاد، وبمعرفة قياس زاوية مستوى الاستقطاب، يمكن قياس قيمة الإجهاد، ويبين الشكل (7.11)، جهاز قياس زاوية دوران الاستقطاب.

58- سلوك المواد غير المرنة:

فرضنا في الدراسة السابقة أن الإجهاد يتناسب مع التشوه، ولكن هذا بشكل عام غير محقق دائماً، فالشكل (7.13)، يوضح تغير الإجهاد بدلالة التشوه لمواد مرنة. يتبين من الرسم البياني لتغير الإجهاد بدلالة التشوه أنه عندما يكون التشوه صغيراً فإن الإجهاد يتناسب طرداً معه، وبعد حد معين يتغير التناسب الطردي بين الإجهاد والتشوه ويبدأ الخط البياني بالانحناء، وفي المواد الضعيفة المرونة فإن المنحني البياني يعاني انقطاعاً عند النقطة التي تتجاوز حد معين للمرونة يسمى الحد الحرج، وتسمى نقطة الانقطاع النقطة الحرجة، وتختلف هذه النقطة من مادة إلى أخرى، ففي الحالة العامة يكون المنحنى البياني للإجهاد

والتشوه أكثر تعقيداً، وفي بعض المواد يكون إجهاد السحب أصغر بكثير من إجهاد الانضغاط كما في الحوار (الطباشير).



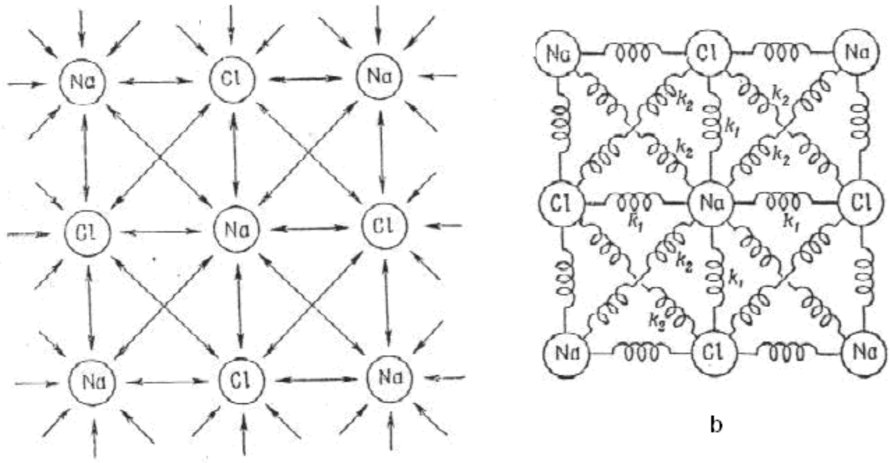
الشكل(7.13) المنحني البياني لتغير الإجهاد مع التشوه

62- حساب ثوابت المرونة:

نحسب أخيراً ثوابت مرونة المواد انطلاقاً من صفات الذرات المكونة لهذه المواد. ننطلق من حالة خاصة بسيطة جسم بلوري مكعب مثل كلور الصوديوم، حيث يتغير شكل أو قياس البلورة المشوهة. تؤدي مثل هذه التغيرات إلى مضاعفة طاقة جهد البلورة، ولحساب تغير طاقة التشوه، يلزم معرفة اتجاه تحرك كل ذرة، ولحساب كامل طاقة ذرات المادة كقيمة صغرى أمر في غاية الصعوبة، للسهولة ندرس بلورة مكعبة بسيطة بحيث أن الإزاحة داخل البلورة تكون هندسياً مماثلة للإزاحة على سطحها.

يمكن حساب ثوابت مرونة بلورة مكعبة كما يلي: نفرض في البداية أنه يوجد قانون ما يعبر عن التأثير المتبادل بين كل زوج من ذرات البلورة، ونحسب بعد ذلك تغير الطاقة الداخلية الناتجة من انحراف الذرات عن وضع التوازن، وذلك بإيجاد العلاقة بين الطاقة والتشوه، حيث نجد أن الطاقة تتناسب مع مربع التشوه، ثم نقارن الطاقة المحسوبة بهذه الطريقة مع الطاقة المحسوبة بالمعادلة (7.17)، فنحصل بالمطابقة على ثوابت المرونة C_{ijkl}.

نفرض للسهولة أن القوى المؤثرة بين الذرات المتجاورة هي قوى مركزية تتم عبر الخطوط التي تصل بين كل ذرتين متجاورتين، نتوقع أن قوى التأثير المتبادل في البلورات الشاردية (الأيونية) يجب أن تكون في الأساس قوى كولونية. (تكون في الرابطة التكافئية قوى التبادل أكثر تعقيداً، حيث يلزم إضافة إلى قوى التأثير المتبادل بين الذرات المتجاورة إضافة التأثيرات الجانبية الأخرى مما يؤدي إلى تعقيد الحساب دون أن يقدم أي جديد مفيد).



الشكل(7.14)، يبين قوى الارتباط بين الذرات المتجاورة.

a) قوى الارتباط بين الذرات. b) تمثيل قوى الارتباط بين الذرات المتجاورة بنابض.

نجمع فقط مساهمة قوى الذرات المتجاورة، ونهمل تأثير الذرات البعيدة بعضها عن بعض. يبين الشكل (7,14a)، قوى التأثير المتبادل بين الذرات المتجاورة في المستوى xy التي سنأخذها بعين الاعتبار، ويجب كذلك الأخذ بعين الاعتبار مساهمة قوى التأثير المتبادل بين الذرات في المستوى yz والمستوى zx كذلك.

بما أننا نهتم فقط بحساب ثوابت المرونة التي تصف التشوهات الصغيرة (إزاحة صغيرة)، لذلك نكتفي في عبارة الطاقة فقط بالحدود التربيعية للإزاحة، أي يمكن اعتبار أن القوى بين كل زوج من الذرات تتغير وفق خطوط الاتصال بينها (إزاحة خطية)، لذلك للتوضيح يمكن القول أن كل ذرة ترتبط مع الذرات

المجاورة بنوييضات (الشكل 7.14b)، وأن جميع هذه النوييضات بين ذرات الكلور وبين ذرات الصوديوم يجب أن يكون لها ثابت مرونة واحد، نفرض أن ثابت مرونة كلٍ منها هو k_1. كما يمكن أن يكون بين ذرات الكلور – الكلور وبين ذرات الصوديوم – الصوديوم ثوابت مرونة مختلفة، ولكن للتبسيط والسهولة نفرض أنها متماثلة ويساوي كلٍ منها k_2.

نفرض أخيراً أن البلورة خضعت لاضطراب تشوه منتظم يوصف بالتنسور e_{ij} تحوي مركباته على x,y,z ، وللتبسيط ندرس فقط التشوه الذي يحتوي على ثلاث مركبات: e_{xx} , e_{xy} , e_{yy} ، بفرض أن إحدى الذرات تقع في مركز الإحداثيات، فإن إزاحة أية ذرة بالنسبة للمركز يعطى بمعادلة مشابهة للمعادلة (7.14).

$$u_x = e_{xx}x + e_{xy}y$$
$$u_y = e_{xy}x + e_{yy}y \qquad \textbf{(7.44)}$$

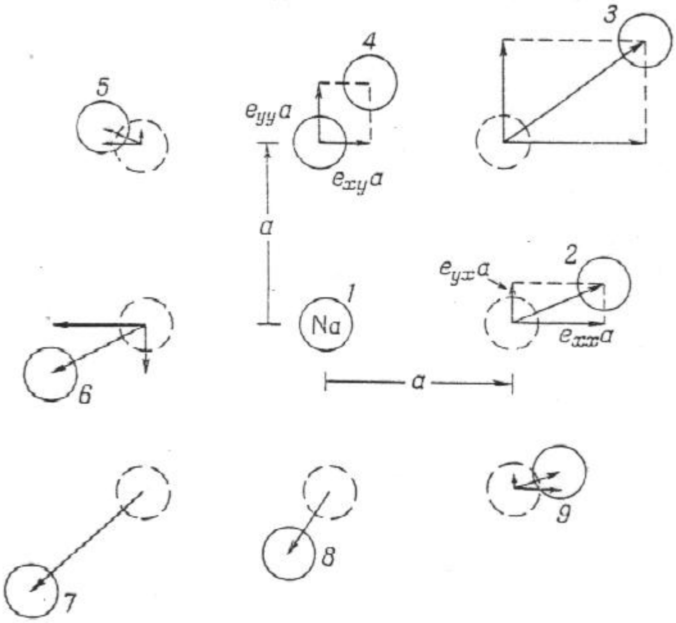
نرمز للذرة التي إحداثياتها $x = y = 0$ بالذرة رقم 1 ورمز بقية الذرات المجاورة مبين على الشكل (7.15). نرمز لثابت الشبكة بالرمز a، فنحصل على x,y مركبات الإزاحتين u_x,u_y كما هو مبين في الجدول (7.2).

الجدول (7.2): مركبات الإزاحة u_x،u_y

الذرة	x ، y	u_x	u_y	k
1	0 ،0	0	0	–
2	a ، 0	$e_{xx}a$	$e_{yx}a$	k_1
3	a ، a	$(e_{xx} + e_{xy})$ a	$(e_{yx} + e_{yy})$ a	k_2
4	0 ، a	$e_{xy}a$	$E_{yy}a$	k_1
5	-a ، a	$(-e_{xx}+e_{xy})a$	$(-e_{yx}+e_{yy})a$	k_2
6	-a ، 0	$-e_{xx}a$	$-e_{yx}a$	k_1
7	-a ، -a	$-(e_{xx}+e_{xy})a$	$-(e_{yx}+e_{yy})a$	k_2
8	0 ، -a	$-e_{xy}a$	$E_{yy}a$	k_1
9	a ،-a	$(e_{xx}-e_{xy})a$	$(e_{yx}-e_{yy})a$	k_2

نحسب أخيراً الطاقة المختزنة في النويبضات. إن هذه الطاقة تساوي حاصل ضرب $k/2$ في مربع استطالة كل نويبض، وهكذا فإن طاقة النويبض الأفقي بين الذرتين 1 و 2 تساوي إلى:

$$\frac{k_1(e_{xx}a)^2}{2} \qquad \textbf{(7.45)}$$



الشكل (7.15)، إزاحة الذرات المجاورة للذرة رقم1

نلاحظ أن الإزاحة من المرتبة الأولى للذرة رقم 2 في اتجاه y لا تغير من طول النويبض بين الذرتين 1 و 2، ولإيجاد طاقة التشوه للنويبضات القطرية بالنسبة للذرة رقم 3، يجب حساب تغير الطول الأفقي والعمودي نتيجة الإزاحة. يمكن التعبير عن إزاحة صغيرة للذرة رقم 3 من مبدأ الإحداثيات بدلالة u_x و u_y في الاتجاه القطري وذلك من العلاقة التالية:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_x + u_y)$$

نستطيع باستعمال قيم u_x, u_y، حساب الطاقة بالشكل التالي:

$$\frac{k_2}{2}\left(\frac{u_x+u_y}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{k_2a^2}{4}\left(e_{xx}+e_{yx}+e_{yy}\right)^2 \qquad \textbf{(7.46)}$$

يلزم لحساب طاقة كل النويبضات في المستوي xy جمع ثمانية حدود مثل الحد في المعادلة (7.45)، والمعادلة (7.46). نرمز لهذه الطاقة بالرمز U_O، فنحصل على:

$$U_0=\frac{a^2}{2}\left\{\begin{array}{l}k_1e_{xx}^2+\frac{k_2}{2}\left(e_{xx}+e_{yx}+e_{xy}+e_{yy}\right)^2+k_1e_{yy}^2+\frac{k_2}{2}\left(e_{xx}-e_{yx}-e_{xy}+e_{yy}\right)^2+\\+k_1e_{xx}^2+\frac{k_2}{2}\left(e_{xx}+e_{yx}+e_{xy}+e_{yy}\right)^2+k_1e_{yy}^2+\frac{k_2}{2}\left(e_{xx}-e_{yx}-e_{xy}+e_{yy}\right)^2\end{array}\right\}$$

(7.47)

ولحساب الطاقة الكلية لكل النويبضات المرتبطة مع الذرة1، يجب إجراء بعض الإضافات على المعادلة (7.47)، تتعلق هذه الإضافة بالذرات القطرية المتجاورة غير الواقعة في المستوى xy، وتساوي الطاقة المضافة إلى:

$$k_2\left(e_{xx}^2a^2+e_{yy}^2a^2\right) \qquad \textbf{(7.48)}$$

تربط المعادلة (7.17)، العلاقة بين ثابت المرونة وكثافة الطاقة ω، وبما أن الطاقة التي حسبناها هي لذرة واحدة، لذلك يجب ضربها بـــ $\frac{1}{2}$. بما أن وحدة الحجم تحتوي على $1/a^3$ ذرة، فإن العلاقة بين ω و U_0 هي:

$$\omega=\frac{U_0}{2a^3}$$

لإيجاد ثوابت المرونة C_{ijkl}، من الضروري أن نربع مجموع ما بين القوسين في المعادلة (7.47)، ثم نضيف الناتج إلى (7.48)، ونقارن ثوابت أمثال $e_{ij}e_{kk}$ المطابقة لأمثالها في المعادلة (7.17).

مثال نجمع أمثال e_{xx}^2 و أمثال e_{yy}^2، نحصل على المضروب التالي:

$$\left(k_1+2k_2\right)a^2$$

لذلك فإن:

$$C_{xxxx}=C_{yyyy}=\frac{k_1+2k_2}{a}$$

ونصادف مصاعب بالنسبة لبقية الحدود. بما أننا لا نستطيع تمييز الفرق بين المضروبين $e_{xx}e_{yy}$ من $e_{yy}e_{xx}$، فان معامل الطاقة لهذين المضروبين يساوي مجوع حدين في المعادلة (7.17). يساوي المعامل عند $e_{xx}e_{yy}$ في المعادلة (7.47) إلى $2k_2$ ، لذلك نحصل على:

$$C_{xxyy} + C_{yyxx} = \frac{2k_2}{a}$$

ينتج من علاقات التناظر أن: $C_{xxyy} = C_{yyxx}$، وبالتالي فإن:

$$C_{xxyy} = C_{yyxx} = \frac{k_2}{a}$$

ونحصل بهذا الأسلوب على:

$$C_{xyxy} = C_{yxyx} = \frac{k_2}{a}$$

وأخيراً بملاحظة أن كل الحدود التي تحوي على الدليل x أو y مرة واحدة تساوي الصفر كما وجدنا سابقاً من علاقات التناظر. يمكن تلخيص النتائج السابقة بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= C_{yyyy} = \frac{k_1 + 2k_2}{a} \\ C_{xyxy} &= C_{yxyx} = \frac{k_2}{a} \\ C_{xxyy} &= C_{yyxx} = C_{xyyx} = C_{yxxy} = \frac{k_2}{a} \\ C_{xxxy} &= C_{xyyy} = ... = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(7.49)}$$

بذلك نكون قد قدمنا مبدأ يربط بين ثوابت المرونة وصفات الذرات التي تظهر من خلال الثابتين k_1 و k_2. تتحقق في البلورة المكعبة الحالة الخاصة $C_{xyxy} = C_{xxyy}$ بحيث لا تؤخذ أي قوى بعين الاعتبار سوى القوى المؤثرة وفق الخطوط التي تصل بين كل زوج من الذرات، أي لا تؤخذ هنا بعين الاعتبار القوى بين الذرات المشابهة لقوى النويبضات (الموجودة في الرابطة التكافئية).

يمكن مقارنة هذه الحسابات مع النتائج التجريبية لقياس ثوابت المرونة، ويتبين في الجدول (7.3) قيم ثلاث ثوابت مرونة لبعض البلورات المكعبة. لقد

ذكرنا أن $C_{xxyy} = C_{xyxy}$، ولكن في الحالة العامة لا تكون هذه المساواة محققة. السبب في ذلك هو أنه في المعادن الشبيهة للصوديوم والبوتاسيوم لا تكون القوى بين الذرات موجهة وفق الخطوط التي تربط بينها، وهذا عكس النموذج الذي أوردناه سابقاً. كذلك الماس لا يخضع لهذا القانون، لأن القوة بين ذرات الماس تساهمية، وتحقق قانوناً خاصاً للربط بين الذرات وذلك وفق نويبضات من رؤوس رباعي سطوح، مثل البلورات الأيونية لـــ فلوريك اليثيوم أو كلور الصوديوم ....فلها جميعاً نفس الصفات الفيزيائية تقريباً، وكما يتبين في الجدول (7.3) فإن الثوابت C_{xxyy} و C_{xyxy} متساوية تقريباً لمعظم المواد.

الجدول (7.3): ثوابت المرونة لبلورات مكعبة (في $10^3 N.m^2$)

البلورة	C_{xxxx}	C_{xxyy}	C_{xyxy}
N	0.055	0.042	0.049
K	0.046	0.037	0.026
Fe	2.37	1.41	1.16
ماس	10.76	1.25	5.76
Al	1.08	0.62	0.28
LiF	1.19	0.54	0.53
NaCl	0.486	0.127	0.128
KCl	0.40	0.062	0.062
NaBr	0.33	0.13	0.13
KJ	0.27	0.043	0.042
AgCl	0.60	0.36	0.062

الفصل الثامن

المبادىء الأساسية للنظرية النسبية الخاصة

لقد سادت مفاهيم نيوتن في الميكانيك حتى نهاية القرن التاسع عشر، تلك المفاهيم التي اعتبرت أن الحركة بالرغم من أنها تتم في الفراغ الا أنها لاتؤثر فيه وأن هناك زمن عالمي يسير بانتظام مهما كانت الحركة. وعندما ظهرت النظرية النسبية لانشتاين ساهمت بتغيير جذري للمفاهيم السابقة، وكان لها أثر بالغ في جميع فروع الفيزياء وخاصةً الفيزياء النووية والذرية، كما أنها تنبأت بظواهر كثيرة أثبت العلم صحتها فيما بعد، بحيث يمكن أن نؤكد بأن ظهور النظرية النسبية أدى إلى بداية فيزياء جديدة أو ميكانيك جديد لاكلاسيكي.

60- **تحويلات غاليلي**:

من المعلوم أن دراسة الحركة تعني ايجاد موضع المتحرك في كل لحظة من الزمن ولابد لتحقيق ذلك من ايجاد وسيلة لقياس المسافة المقطوعة، ثم ايجاد وسيلة أخرى لقياس الزمن. مثل هذا نسميه جملة القياس، وليس من الضروري أن تكون هذه الجملة ثابتة اذ يمكن أن تكون متحركة بنظام معين ولكننا سنهتم بصورة خاصة بالجمل العطالية وهي التي تتحرك بعضها بالنسبة للبعض بحركة مستقيمة ومنتظمة، ولنأخذ الحالة الخاصة عندما تتحرك الجملة K بسرعة ثابتة (V) بالنسبة للجملة الثابتة (K_1) وبالاتجاه ox شكل (8.1).

فإذا كانت M نقطة مادية تتحرك في الجملة K فان العلاقة بين احداثياتها في الجملتين:

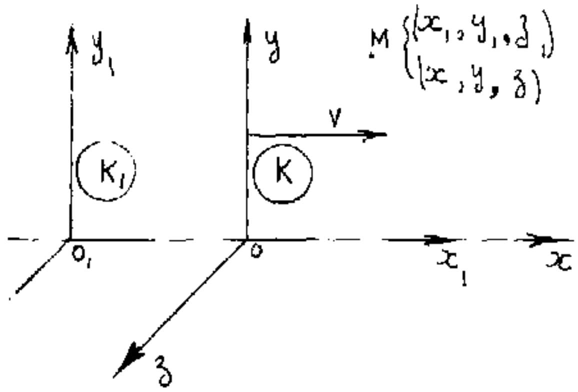
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + Vt \\ y_1 &= y \\ z_1 &= z \end{aligned}\right\} \qquad (8.1)$$

وبالاشتقاق بالنسبة للزمن نجد:

$$\dot{x}_1 = \dot{x} + V \quad , \quad \dot{y}_1 = \dot{y} \quad , \quad \dot{z}_1 = \dot{z} \qquad (8.2)$$

أي أن مركبات شعاع السرعة على المحاور oz و o_1z_1 و oy و o_1y_1 متساوية فيما بينها، ولاتساوي مركبة السرعة على المحور ox مركبة السرعة المقابلة لها على المحور o_1x_1 فالنقطة M تكون أسرع اذا ما نظر اليها من الجملة K_1. أما إذا اشتققنا العلاقة (8.2) مرة ثانية بالنسبة للزمن فاننا نجد:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x} \quad , \quad \ddot{y}_1 = \ddot{y} \; , \; \ddot{z}_1 = \ddot{z} \qquad (8.3)$$



الشكل (8.1)

أي أن تسارع النقطة M في الجملة K يساوي تسارعها في الجملة K_1 وبالتالي، حسب قانون نيوتن الثاني، فان القوتين المؤثرتين على النقطة M تكونان متساويتين في كلتا الجملتين، وهذا يعني أن حركة النقطة M تكون متشابهة في الجملتين، فالحجر المرمى الذي يرسم قطعاً مكافئاً في الجملة K_1 سيرسم أيضاً قطعاً مكافئاً في الجملة K. ويجب الملاحظة هنا أننا اعتبرنا الزمن نفسه في المجموعتين، ويمكننا الحصول أيضاً على النتائج نفسها إذا فرضنا أن الجملة K هي الثابتة والجملة K_1 هي المتحركة بسرعة $(-V)$ بالنسبة الى K، أي أن كلمتي ساكن ومتحرك هما مفهومان نسبيان وما هو ساكن بالنسبة لي قد

يكون متحركاً بالنسبة لغيري. وهكذا نلاحظ أن الحركة المستقيمة المنتظمة لجملة القياس لاتؤثر مطلقاً على الحوادث الميكانيكية التي تجرى فيها. وهذا مايعرف بمبدأ النسبية لغاليلي، فلايمكننا الوقوف على حقيقة حركة جملة عطالية بتجارب ميكانيكية تجرى فيها.

61- **ظاهرة دوبلر، الأثير، تجربة مايكلسون ومورلي**:

لقد كان الطريق الذي أدى إلى وجود النظرية النسبية شاقاً وطويلاً، ولايمكننا الآن الا كتابة الشيء اليسير عن ذلك، وسنكتفي بايراد أهم القفزات العلمية التي ساعدت العالم انشتاين في اكتشاف نظريته الهامة.

شهدت نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين تقدماً كبيراً في علوم الضوء والكهرباء واضطر العلماء لفرض وجود وسط مرن، سموه الأثير، لكي يعللوا بواسطته الظواهر الكهرضوئية التي واجهتهم.

وقالوا أنه يملأ كل فراغ ويستطيع نقل الاهتزازات بمختلف أنواعها واعتبروه ساكناً وقاسوا سرعة الضوء بالنسبة له، وتساءل العلماء عن امكانية تحديد حركة الجملة العطالية بتجارب ضوئية تجرى فيها، (طالما أنه ليس من الممكن معرفة ذلك بتجارب ميكانيكية) وهذا ممكن إذا كانت الحركة تؤثر على أحد عناصر الموجة الضوئية وهي تواتر الاهتزاز وسرعة الانتشار واتجاهه.

اكتشف دوبلر عام /1842/ تأثير حركة المنبع الضوئي على تواتر اهتزاز الموجة الضوئية التي يصدرها هذا المنبع. فلنفرض أن جملة القياس تتحرك بسرعة منتظمة V مبتعدة عن المنبع الضوئي الثابت بدلالة الأثير الساكن فيمكننا، انطلاقاً من تحويلات غاليلي التأكد من أن تواتر الموجة الضوئية سيختلف عن التواتر الحقيقي بالنسبة لشخص مقيد بالجملة المتحركة وسيصبح:

$$\nu_1' = \nu(1-\beta) \qquad (8.4)$$

حيث $\beta = \frac{V}{c}$ هي نسبة سرعة الجملة المتحركة على سرعة الضوء. أما عندما يتحرك المنبع مبتعداً عن الشخص الثابت بدلالة الأثير فان تطبيق نفس التحويلات يعطينا العلاقة التالية:

$$v'_2 = \frac{v}{1+\beta} \tag{8.5}$$

والمقدارين v'_1 و v'_2 غير متساويين الا إذا كتبنا أن:

$$1-\beta = \frac{1}{1+\beta} \Rightarrow 1-\beta^2 = 1 \tag{8.6}$$

أي يجب أن نهمل المقدار β^2 أمام الواحد، وهذا يعني أنه اذا استطعنا بتجارب ضوئية قياس المقادير من رتبة β^2 فإنه يمكن تحديد الحركة الحقيقية عن الحركة النسبية؛ أي معرفة الجملة المتحركة والجملة الثابتة. ولزيادة الايضاح نأخذ المثال التالي المتعلق بقياس الزمن وفرق المسير بين شعاعين ضوئيين.

ليكن جسم متحرك بسرعة V بدلالة الأثير الساكن ولنضع عليه منبعاً A ومستقبلاً للأمواج الكهرطيسية B البعد بينهما ℓ، فإذا كانت الحركة باتجاه المنبع–المستقبل (أي باتجاه انتشار الموجة) شكل (8.2) فيمكن حساب الزمن اللازم للضوء ليصل بينهما بسهولة اذا لاحظنا أن على الموجة الضوئية أن تقطع، خلال زمن T_1، المسافة ℓ بالاضافة إلى المسافة التي يكون قد قطعها المستقبل B في هذه الفترة وهي VT_1 أي أن:

$$CT_1 = \ell + VT_1$$

ومنه:

$$T_1 = \frac{\ell}{C-V} \tag{8.7}$$

فإذا قسنا الزمن T_1 فيمكن ايجاد سرعة الجسم المتحرك V بدلالة الأثير، غير أن السرعة التي حصل عليها في نهاية القرن التاسع عشر كانت صغيرة جداً بحيث يتعذر قياس المقدار T_1، ولكن كان من الممكن مقارنة T_1 بزمن آخر T_2 يقطع خلاله المستقبل B المسافة BB' كما في الشكل (8.3) حيث تتم الحركة باتجاه متعامد مع اتجاه حركة جملة المنبع– المستقبل وعندئذٍ نجد أن الزمن اللازم لكي يقطع الضوء المسافة AB' يساوي:

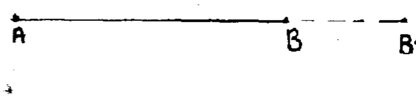
$$T_2 = \frac{\sqrt{\ell^2 + V^2 T_2^2}}{c} \qquad (8.8)$$

ومنه:

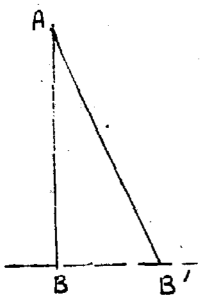
$$T_2 = \frac{\ell}{c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (8.9)$$

ومنـه :

$$T_2 = \frac{\ell}{C\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \qquad (10.9)$$



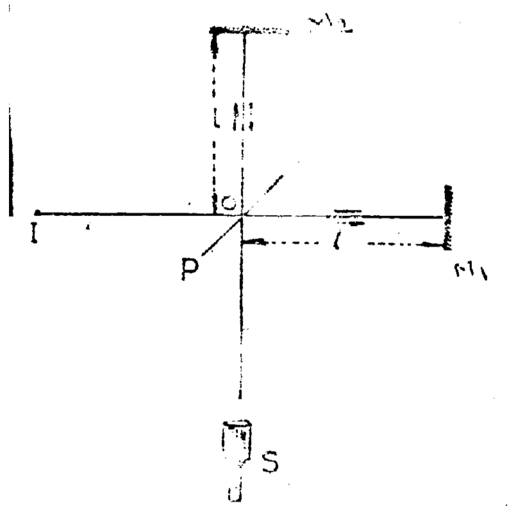
الشكل (8.2)



الشكل (8.3)

فإذا جعلنا الشعاعين الضوئيين الموافقين للحالتين يتداخلان فسيكون بينهما فرق في المسير الضوئي قدره $(T_2 - T_1)$ مما يسبب تداخلهما، ومن دراسة هذا التداخل يمكننا حساب V. وقد استطاع مايكلسون عام 1882 تحقيق ذلك؛ فقد صمم جهازاً للتداخل قادراً على اظهار فروق في المسير أصغر من القيمة السابقة بكثير (الشكل 8.4) وهو يتألف من منبع ضوئي I يصدر أمواجاً ضوئية تسقط على صفيحة نصف مفضضة P مائلة بزاوية مقدارها $45°$ درجة فتتقسم الحزمة الضوئية الواردة إلى قسمين أحدهما يتحرك باتجاه عمودي على حركة الأرض الانسحابية، وعندما تقطع مسافة ℓ تسقط على مرآة مستوية وتنعكس عليها لتلتقي مع الحزمة الأخرى التي تسير باتجاه حركة الأرض والتي قطعت المسافة نفسها ℓ قبل أن تنعكس على مرآة مستوية متعامدة مع الأولى، ثم تلتقي الحزمتان في النقطة O لتصلا فيما بعد إلى عين S. فإذا كان بينهما أي فرق في

المسير فإننا سنشاهد أهداب التداخل، ولكن ذلك لم يحدث أبداً ولم يلاحظ أي فرق في المسير بين الشعاعين، وبالتالي فإن الزمنين T_1 و T_2 متساويان تماماً.
و قد أعيدت تجربة مايكلسون عدة مرات، كما تم اجراء تجارب أخرى لنفس الغرض نذكر منها تجربة ديستير Destaire 1912 الذي اقترح اجراء التجارب على مايسمى بالنجوم المزدوجة، وهي تلك التي تتألف من نجمين قريبين أحدهما من الآخر ومتحركين حول مركز عطالتهما، فإذا قسنا سرعة الضوء عندما يقترب النجم من الأرض وعندما يبتعد عنها فيمكن تعيين سرعتهما بدلالة الأثير الساكن. غير أن كل هذه المحاولات لم تنجح باظهار أي فروق في المسير، فظهرت عدة نظريات لتقليل سلبيات هذه التجارب لكنها لم تقبل وسقطت جميعها أمام النظرية النسبية.



الشكل (4-8)

62- **فرضيتا انتشاين**: The Einstein's Postulates

ان النتائج السلبية لتجارب مايكلسون قادت أنشتاين إلى اعادة النظر والدراسة والتفكير في مبادىء الفيزياء الكلاسيكية وخاصةً تلك التي تتعلق بالمكان والزمان، ونتيجة لذلك اكتشف مايسمى الآن بالنظرية النسبية الخاصة التي ترتكز على فرضيتين أساسيتين.

1- فرضية نسبية أنشتاين:

2- فرضية السرعة الحدية الثابتة لانتشار تأثير الأجسام بعضها ببعض والتي تعني أن أي تأثير متبادل ما بين أي جسمين لايمكن أن يتم لحظياً وإنما ينتشر في الفراغ بسرعة حدية ثابتة لاتتجاوز سرعة الضوء (أو سرعة الأمواج الكهرطيسية بصورة عامة) ولاتتأثر هذه السرعة بحركة المنبع الباعث لها.

طبقاً للفرضية الأولى فإن الحركة المستقيمة المنتظمة للأجسام لاتؤثر مطلقاً على الحوادث التي تجرى فيها، أي أن قوانين الطبيعة يجب أن تكون متشابهة في كل الجمل العطالية فإذا عبرنا عن قانون في احداها بدلالة الاحداثيات والزمن بعلاقة رياضية ما، فإنه يجب أن يعبر عن القانون نفسه بالعلاقة نفسها في الجمل العطالية الأخرى كافةً، وهكذا كما نلاحظ، تعميم مباشرة لمبدأ غاليلي الذي درسناه في بداية هذا الفصل، ولكن الاختلاف الرئيسي بين النظريتين هو كيفية الانتقال من جملة للقياس إلى جملة أخرى. فقد كانت العلاقات (8.1) كافية لذلك سابقاً أما الآن فيجب صياغة العلاقات بين الزمن والمكان في الجملتين من جديد انطلاقاً من الفرضية الثانية والتي تظهر بوضوح أنها التعبير النظري عن تجربة مايكلسون.

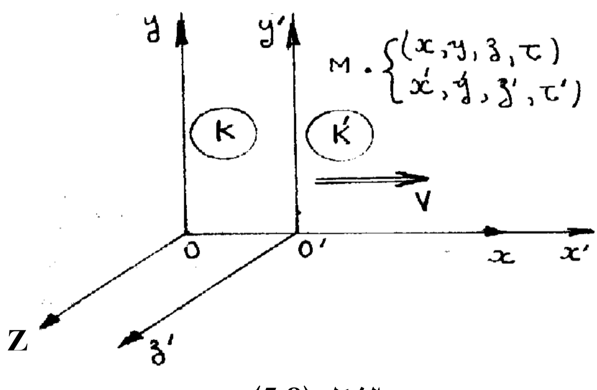
ان الفرضية الثانية تنفي امكانية حركة أجسام مادية بسرعة أكبر من سرعة الضوء أو الأمواج الكهرطيسية لأنه لو تحقق ذلك لانتشر التأثير بسرعة أكبر من سرعة الضوء بواسطة هذه الأجسام المادية وهذا بحد ذاته يناقض الفرضية نفسها.

لنلاحظ أن الفرضية الثانية مرتبطة تمام الارتباط مع الأولى لأنه إذا لم تكن سرعة الأمواج الضوئية حدية وثابتة، كأن تتبع مثلاً سرعة المنبع فإن الفرضية الأولى لن تتحقق. فمثلاً إذا توقفت سرعة الضوء على سرعة المنبع المستقيمة المنتظمة فيمكننا عندئذٍ تعيين هذه السرعة بواسطة تجارب أخرى تجرى في جملة المنبع الضوئي.

ان كل نتائج النظرية النسبية يجب أن تأتي من الفرضيتين السابقتين ولنبحث أولاً في كيفية الانتقال من جملة عطالية الى أخرى لاستنتاج مايسمى بتحويلات لورنتز.

63- **تحويلات لورنتز**: لتكن الجملتان K و K' شكل (8.5) المتحركتان أحداهما بالنسبة للأخرى بسرعة نسبية V ولتكن (x,y,z,t) و (x',y',z',t') الاحداثيات والزمن في كل منها، فليس هناك أي سبب يجعلنا نضع الزمنين متشابهين في الجملتين كما فعلنا سابقاً في الميكانيك الكلاسيكي بدون دراسة وتمحيص، وللتسهيل سنفرض أن الحركة النسبية تجرى في الاتجاه ox ولنفرض أنه في اللحظة t' مقدرة في الجملة K' تحدث ظاهرة فيزيائية في نقطة M' احداثياتها الديكارتية x',y',z'، تسمى هذه الظاهرة حادثة فيزيائية ونقول أن احداثياتها هي (x',y',z',t') ولتحديد احداثيات هذه الحادثة (x,y,z,t) في الجملة K وايجاد العلاقة بين (x,y,z,t) و (x',y',z',t') نأخذ صدر الموجة الضوئية المنطلقة في اللحظة $t = t' = 0$، أي عندما كانت الجملتان منطبقتين، ان صدر هذه الموجة سيرسم كرة معادلتها:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \qquad (8.10)$$



الشكل (5.8)

وحسب الفرضية الأولى فإن الموجة الضوئية لهذه الحادثة الفيزيائية ستنتشر أيضاً في الجملة K' وبنفس القانون وبسرعة c حسب الفرضية الثانية أي:

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0 \quad (8.11)$$

وعند الانتقال من جملة الى أخرى يجب أولاً أن تبقى العلاقات (8.10)، (8.11) محققة وثانياً أن يكون هذا الانتقال خطياً وذلك انطلاقاً من تجانس الفراغ الذي لايوجد فيه نقط مميزة تتمتع عن غيرها بصفات خاصة.

ولما كانت الحركة تحدث في الاتجاه ox فيمكن مباشرةً كتابة أن:

$$y'=y \quad , \quad z'=z \qquad (8.12)$$

ولايجاد العلاقة ما بين x و 'x نلاحظ أنه اذا انطبق مبدءا الجملتين في اللحظة $t=0$ فإن معادلة المستوي $x'=0$ في الجملة 'K ستصبح $x-Vt=0$ في الجملة K أي أن $x'=\alpha(x-Vt)$ وفي الحالة العامة سيكون هذا الثابت α تابعاً للسرعة أي:

$$x'=\alpha(V)(x-Vt) \qquad (8.13)$$

حيث $\alpha(V)$ هو تابع للسرعة فقط ولايمكن أن يتبع الاحداثيات. أما بالنسبة للزمن في كلتا الجملتين فيمكن أن نفرض علاقة التحويل الخطية:

$$t'=\beta t+\gamma x \qquad (8.14)$$

حيث β و γ تابعان يجب تعيينهما، ويمكن في الحالة العامة أن يتبعا السرعة.

ولحساب العوامل γ , β, α نعوض العلاقتين (8.13) ، (8.14) في العلاقة (8.11) فنجد:

$$\alpha^2(x-Vt)^2+y'^2+z'^2-c^2(\beta t+\gamma x)^2 \equiv x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \quad (8.15)$$

وبالمطابقة بين الطرفين نحصل على المعادلات الثلاث التالية:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^2-c^2\gamma^2=1\\ &\alpha^2V^2-c^2\beta^2=-c^2\\ &\alpha^2V+c^2\beta\gamma=0 \end{aligned}\right\} \qquad (8.16)$$

ومنها نعين المجاهيل الثلاثة α , β, γ فنجد:

$$\alpha=\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ \gamma=-\frac{\alpha V}{c^2}=-\frac{V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad (8.17)$$

وبالتبديل في (8.13) و (8.14) نحصل أخيراً بعد ملاحظة (8.12) على التحويلات التالية:

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ \ y'=y\ ,\ \ z'=z\ ,\ t'=\frac{t-\frac{V^2}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (8.18,a)$$

وهي المسماة تحويلات لورنتز والتي تقابل تحويلات غاليلي (8.1) في الميكانيك الكلاسيكي.

واضح أنه يمكن الانتقال من K' إلى K إذا لاحظنا أن K تتحرك بالنسبة إلى K' بسرعة V− وبالتالي سيكون:

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\ ,\ y=y'\ ,\ z=z'\ ,\ t=\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (8.18,b)$$

إن أهمية هذا التحويل تأتي أولاً من أنه مستنتج فقط من فرضيتي أنشتاين الأساسيتين وأن تحويلات غاليلي (8.1) ليست إلا حالة خاصة منه، وهذا يعني أن فرضيتي أنشتاين لاتنفيان أبداً تحويلات غاليلي ولكنهما تبينان أنها صحيحة فقط من أجل السرعة الصغيرة جداً بالنسبة لسرعة الضوء أي عندما $V \ll c$ إذ من السهل الحصول على التحويلات (8.1) إذا أهملنا في العلاقات (8.18) المقدار $\frac{V}{c}$ وفي هذه الحالة نجد: $x'=x-Vt\ ,\ t'=t$ أي أن تحويلات غاليلي هي حالة خا صة من تحويلات لورنتز تنتج عندما $V \ll c$.

64- **نتائج تحويلات لورنتز، الفواصل المكانية والزمانية**:

إن نتائج النظرية النسبية تتناقض تناقضاً جذرياً مع الفيزياء الكلاسيكية حول خواص الفراغ والزمن، فليس مفهوما الحجم والزمن مطلقين ولايتمتعان "بالقداسة" كما كان ذلك عند نيوتن وإنما يتغيران بحسب الجملة العطالية التي يقاسان بها.

لندرس أولاً مفهوم طول جسم في جملتين عطالتين، ولذلك نفرض أن طول الجسم يحدد بالفرق بين فاصلتي بدايته ونهايته في الجملة المتحركة أي $x'_2-x'_1$ على أن تؤخذ الفاصلتان في نفس اللحظة ولنحسب هذا الطول في الجملة K أي (x_2-x_1) بواسطة علاقتي التحويل التاليتين:

$$x'_2=\frac{x_2-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\ ,\ x'_1=\frac{x_1-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (8.19)$$

بالطرح نجد:

$$x'_2-x'_1=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (8.20)$$

فإذا رمزنا للطول $x'_2-x'_1$ بالرمز L_0 وللطول x_2-x_1 بالرمز L لأمكننا وضع العلاقة (8.20) الممثلة لطول الجسم في الجملة K بالشكل التالي:

$$L=L_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \qquad (8.21)$$

وهي لاتساوي الطول L_0 في الجملة 'K اذن فالطول L_0 يتقلص بالنسبة $1:\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ إذا قيس من قبل مراقب موجود في K، ولما كانت الحركة في الاتجاه ox لاتؤثر على البعدين y و z فيمكن تعميم العلاقة (8.21) في حالة الحجم فنجد أنه طبقاً للعلاقة:

$$V=V_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \qquad (8.22)$$

بالرغم من أن ذلك الحجم لايعاني من تأثير أي قوة خارجية فإنه تقلص بنسبة معينة. وهكذا فإن قولنا أن المسافة بين نقطتين هي L ليس له معنى إلا إذا قلنا في أية جملة نقيس هذه المسافة، وهذا مايناقض الفيزياء الكلاسيكية حيث نعلم أن الزمن والطول وبالتالي الكتلة مفاهيم مطلقة.

ويمكن الآن على ضوء ماسبق تعليل النتائج السلبية لتجربة مايكلسون ومورلي. من المعلوم أنه كانت الغاية من التجربة قياس سرعة الأرض الانتقالية بالنسبة للأثير، فإذا جعلنا مسار أحد الشعاعين الضوئيين باتجاه حركة الأرض وجعلنا مسار الآخر متعامداً مع هذا الاتجاه فإن المسافة التي سيقطعها الشعاع الأول ما بين 0 والمرآة M_1 (شكل 8.4) لن تساوي ℓ كما حسبناها سابقاً في جملة الأثير وإنما تكون قد تقلصت بفعل الحركة وأصبحت $\frac{\ell}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ حيث V سرعة الأرض بالنسبة للأثير، وبالتالي فالزمن اللازم لقطع هذه المسافة ذهاباً وإياباً هو $\frac{2\ell}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ أما الشعاع الضوئي التالي الذي تحرك باتجاه متعامد مع اتجاه حركة الشعاع الأول فيلزمه كما رأينا في (8.9) زمناً $2T_2$ وهذا يساوي $\frac{2\ell}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ و يبدو بوضوح أن الزمنين مستاويان تماماً وبالتالي لن يظهر أي فرق في المسير بينهما ولن يظهر في الجهاز أي أهداب تداخل.

ويجب التأكيد هنا أن تقلص الأطوال هو ظاهرة حركية صرفة وليس ميكانيكية، ونعني بذلك أن الجسم المتحرك بسرعة كبيرة لن يخضع لقوى معينة (اجهادات) تسبب تشوهاً في شكله إذ لايستطيع الشخص المرافق لهذا الجسم أن يلاحظ هذه التغيرات. وبهذه المناسبة نقول أن مفهوم الجسم الصلب (وهو الجسم الذي لايتشوه بحيث تبقى المسافة بين أي نقطتين منه ثابتة) يناقض النظرية النسبية ولبرهان ذلك نقول أنه لو وجد هذا الجسم لأمكننا بواسطته نقل التأثير من مكان إلى آخر بسرعة لانهائية، إذ أن صدمة صغيرة في احدى نهايتيه يمكن أن تنتقل لحظياً إلى النهاية الأخرى وهذا طبعاً يخالف الفرضية الثانية.

وبنفس الطريقة يمكن أن نبرهن ظاهرة تمدد الأزمنة، ولذلك نأخذ حادثة تحدث في المجال الزمني $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$ مقاساً في الجملة K' وفي نقطة معينة، حيث t'_2, t'_1 زمن ابتداء وانتهاء الحادثة وحسب التحويلات (8.18,b) يكون:

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad t_1 = \frac{t'_1 + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad (8.24)$$

والمجال الزمني المقابل للحادثة في الجملة K هو $\Delta t = t_2 - t_1$ سيصبح:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad (8.25)$$

فالزمن المقاس في الجملة K' لايساوي الزمن المقاس في الجملة K وبالتالي فإن مفهوم الزمن نسبي أيضاً، ويجب علينا دائماً تحديد الجملة التي قيس فيها هذا الزمن، إذا أردنا أن نكون علميين في قياساتنا، ويمكن أيضاً الحصول على علاقة مشابهة عند الانتقال من K إلى K' فنجد من (8.18,a) أن الزمن $\Delta t'$ المقاس في الجملة K يساوي:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad (8.26)$$

ولقد ظهرت عدة تجارب للتحقق من صحة تمدد الأزمنة، نذكر منها تلك المتعلقة بتفكك بعض الجسيمات الأساسية وبصورة خاصة الميزونات μ؛ فمن المعلوم أن الميزون الموجب μ^+ يتفكك إلى بوزيترون (الكترون موجب) وجزيئي نيترينو أما الميزون السالب μ^- فيتفكك إلى الكترون وجزيئي نيترينو حسب المعادلة:

$$\mu^{\pm} \longrightarrow e^{\pm} + 2\nu$$

ويتم هذا التفكك مهما كانت سرعة الميزون المتحرك، فإذا علمنا أن سرعة هذا الميزون قد تصل إلى مقدار قريب من سرعة الضوء فإن الفرق بين

زمن حياة الميزون السريع والميزون البطيء سيكون ملحوظاً، العلاقة الزمنية ستكون من الشكل:

$$\tau_K = \frac{\tau_S}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

حيث τ_k زمن حياة الميزون المتحرك بسرعة V و τ_s زمن حياة الميزون الساكن (البطيء) ومن المعلوم من التجارب الفيزيائية الدقيقة أن $\tau_s = 2 \times 10^{-6}\,\text{sec}$ فإذا كان زمن حياة الميزون لايتعلق بسرعته فإنه يجب أن يقطع مسافة x تعطى بالعلاقة:

$$x = V\tau = 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} = 600\,\text{m} \qquad (V = c)$$

غير أن التجربة تثبت أن الميزونات تقطع حوالي 20 km قبل أن تتفكك وبالتالي فهذا يوافق زمناً قدره:

$$\tau_k = \frac{20 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 7 \times 10^{-5}\,\text{sec} = 50\,\tau_s$$

وهذا التصحيح يجب أن يؤخذ بعين الاعتبار ولايمكن اهماله، (ويبدو أن الميزون يتحرك بسرعة هرباً من الموت الذي يلي التفكك).

وفي نهاية هذه الفقرة لابد لنا بغية زيادة الايضاح من الاجابة على السؤالين التاليين:

1- هل كانت النتائج التجريبية متوافقة مع المفاهيم النيوتينية حول الطول المطلق للجسم والزمن العالمي قبل ظهور النظرية النسبية؟

2- هل تقلص الأطوال وتمدد الأزمنة حادثة حقيقية أم ظاهرية؟

إن الجواب على السؤال الأول واضح، وهو أنه قبل تجربة مايكلسون ومحاولة تحديد سرعة الأرض بالنسبة للأثير الساكن لم يتعامل العلماء مع سرعات كبيرة بحيث كانت النسبة $\frac{V}{c}$ صغيرة دائماً، ولذلك كان من الممكن دائماً القبول بالنتائج الكلاسيكية، أما الآن وبعد تطور العلوم الفيزيائية فقد أصبحت النظرية النسبية أحد أركان الفيزياء الحديثة التي لابد فيها لتفسير كثير

من الظواهر في هذه الفيزياء، كما أن كثيراً من التجارب العلمية التي لايتسع المجال لذكرها هنا برهنت على صحة نظرية أنشتاين.

وللإجابة على السؤال الثاني نقول أنه كثيراً ما نستعمل كلمة ظاهري للدالة على أن تقلص الأطوال وتمدد الأزمنة هو ظاهرة حركية وليس ميكانيكية. قد يكون من المفيد التنويه أن التأثيرات السابقة هي حقيقية بمعنى أنها تحدث فعلاً وليس مرتبطة بأي وهم أو خيال المراقب، فهي ليست (سراباً) ولكن لايستطيع مراقبتها إلا الشخص الثابت بالنسبة لها، وصعوبة فهم ذلك تأتي من أننا تعودنا على طول ثابت للأشياء وزمن عالمي يسير بانتظام، بينما هي في الحقيقة غير ذلك، إذ أن الأطوال والأزمنة تتغير بعضها بالنسبة للبعض الآخر ولانستطيع أن نؤكد أي منها الطول الحقيقي الأصلي الذي لم يتغير لأن ذلك مشابه للسؤال، أي من الجملتين ثابتة وأي منها متحركة؟ وهكذا فإن مفهومي الطول والزمن نسبيين تماماً كمفهومي الحركة والسكون.

ولزيادة الايضاح نورد المثال التالي:

لتكن الكرتان المشحونتان A' و A احداهما مرتبطة مع الجملة K، والثانية مع K'، من الواضح أن الكرة A' ستتحول من وجهة مراقب موجود في الجملة K، إلى مجسم قطع ناقص لأنها تتقلص باتجاه الحركة وبالتالي فإن التأثير المتبادل بين الكرتين ستحسب كما لو كان بين مجسم قطع ناقص A' وكرة A. وبالعكس فإن مراقباً في الجملة K' سيلاحظ أن A تحولت إلى مجسم قطع ناقص و A'، المرتبطة معه، بقيت كما هي وبالتالي يمكن حساب التأثير المتبادل من وجهة نظره أيضاً كما في الحالة الأولى ولكن بتبديل مكاني الجسمين (وكما تراني ياجميل أراك)، وهكذا تبقى الحادثة الفيزيائية واحدة في الحالتين.

65- **قانون جمع السرع، تحويلات الزوايا**:

يسهل ايجاد قانون جمع السرع إذا طبقنا العلاقات (8.18,b) من أجل عنصر تفاضلي dx حيث نجد:

$$dx = \frac{dx' + V\,dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad dy = dy'$$

$$dz = dz' \quad , \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}\,dx'}{c^2} \qquad (8.27)$$

وإذا كانت z' و y' و x' هي احداثيات النقطة المادية في الجملة K' فإن مركبات سرعتها على المحاور الاحداثية ستكون:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad , \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad , \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'} \qquad (8.28)$$

وفي الجملة K سيكون:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad , \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad , \quad u_z = \frac{dz}{dt} \qquad (8.29)$$

نقسم طرفي المعادلات (8.27) على الزمن dt فنجد:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + V}{1 + V\frac{u'_x}{c^2}} \\ u_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + V\frac{u'_x}{c^2}} \\ u_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + V\frac{u'_x}{c^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (8.30)$$

وهذه المعادلات تعبر عن قانون جمع السرع في النظرية النسبية، ونجد بسهولة عندما $V << c$ أن:

$$u_x = u'_x + V \quad , \quad u_y = u'_y \quad , \quad u_z = u'_z$$

وهو قانون تركيب السرع في الميكانيك التقليدي، ولايجاد قانون تغيير الزوايا نأخذ الزاوية θ التي ظلها يعطى بالعلاقة:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u_y}{u_x} \tag{8.31}$$

ولنحسب قيمة الزاوية المقابلة لها في الجملة K' ولذلك نبدل u_y و u_x بقيمتيهما من (8.30) فنجد أخيراً:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{V+u'\cos\theta}\sin\theta' \tag{8.32}$$

حيث وضعنا:

$$u'_x = u'\cos\theta' \quad , \quad u'_y = u'\sin\theta'$$

وتدل العلاقة (8.32) على أن مفهوم الزاوية نسبي أيضاً، ويجب دائماً معرفة في أي جملة قيست هذه الزاوية؟

66- **تواقت حادثتين**:

لنفرض الآن حدوث حادثتين في نفس الوقت t' في الجملة K' المتحركة بالنسبة K: الأولى وقعت في النقطة التي فاصلتها x'_1 والثانية في النقطة التي فاصلتها x'_2 ولنبحث فيما إذا كانتا متواقتتين في الجملة K. وغني عن البيان أن الحادثتين المتواقتتين في جملة ما في الميكانيك الكلاسيكي ستبقيان متواقتتين في كل الجمل الأخرى، ولكن الأمر مختلف في النظرية النسبية، ولبرهان ذلك نفرض أن t_1 هو زمن وقوع الحادثة الأولى في الجملة K والذي يعطى بالعلاقة:

$$t_1 = \frac{t'+V\frac{x'_1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

أما الحادثة الثانية فتحدث في الزمن t_2 حيث:

$$t_2 = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

والفرق الزمني بين حدوثهما هو:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{V}{c^2} \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (8.33)$$

وهو لايساوي الصفر، هذا بالاضافة إلى أنه يتبع اشارة المقدار $(x'_2 - x'_1)$ فقد يكون موجباً أو سالباً وبالتالي فقد تحدث الحادثة الثانية قبل الأولى في الجملة K. وفي الحالة الخاصة عندما تقع الحادثتان في الجملة K' في النقطة نفسها أي: $x'_1 = x'_2$ فإن $\Delta t = 0$ مهما كانت V وتكون الحادثتان متواقتتين في كل الجمل العطالية على الاطلاق.

67- **القيم المطلقة في النظرية النسبية –المجال- الزمن الخاص**:

قد تكون النظرية النسبية مسؤولة عن تشويش أفكارنا العلمية، فالطول نسبي و الزمن نسبي والتواقت نسبي والزاوية نفسها نسبية، فما هو المطلق اذن في هذا الكون؟

لعل في هذا القول السابق بعض التجني على هذه النظرية الرائعة التي، على العكس، حاولت أن تحررنا من قيود الزمان والمكان، وتبين لنا مانحن فيه من خطأ، لتساعدنا على البحث عن المفاهيم المطلقة التي وجد الكثير منها انطلاقاً من النظرية النسبية، والتي تسمى أحياناً بنظرية اللامتغيرات الفيزيائية، ولنبحث الآن في بعض هذه اللامتغيرات.

لتكن الحادثة في الزمن t وفي النقطة (x, y, z) وفي لحظة أخرى t_1 ونقطة أخرى (x_1, y_1, z_1) تحدث حادثة ثانية في اللحظة نفسها وعندئذٍ نعرف المجال بين الحادثتين بالعلاقة:

$$S = \sqrt{c^2 (t_1 - t)^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2} \qquad (8.34)$$

نقول أن هذا المجال لامتغير Invariant بمعنى أنه لايتغير عند الانتقال من جملة إلى أخرى، ويمكن التأكد من ذلك بواسطة تحويلات لورنتز، لنأخذ المجال نفسه في الجملة K' فنجد:

$$S'=\sqrt{c^2(t'_1-t')^2-(x'_1-x')^2-(y'_1-y')^2-(z'_1-z')^2} \quad (8.35)$$

ثم لنحسب S' في الجملة K' انطلاقاً من تحويلات لورنتز (8.18) فنجد أولاً:

$$c^2(t'_1-t')^2=\frac{c^2(t_1-t)^2-2V(x_1-x)(t_1-t)+\frac{V^2}{c^2}(x_1-x)^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

$$(x'_1-x')^2=\frac{(x_1-x)^2+V^2(t_1-t)^2-2V(x_1-x)(t_1-t)}{1-\frac{V^2}{c^2}} \quad (8.36)$$

$$(y'_1-y')^2=(y_1-y)^2$$

$$(z'_1-z')^2=(z_1-z)^2$$

وبالتبديل في (8.35) نجد أن $S = S'$ وبالتالي فالمجال هو لامتغير فيزيائي Physical Invariant.

كثيراً مايؤخذ، عوضاً عن المجال S، عنصر المجال dS الذي يكتب بالشكل:

$$dS=\sqrt{c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2}=\sqrt{c^2dt'^2-dx'^2-dy'^2-dz'^2} \quad (8.37)$$

الذي قد يكون موجباً أو سالباً ففي الحالة الأولى: (وبعد استبدال d بـــ Δ) أي عندما:

$$c^2(\Delta t)^2>(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2 \quad (8.38)$$

فيمكننا عندئذٍ دائماً ايجاد جملة قياس K' بحيث تحدث فيها حادثتان في نفس المكان أي:

$$\Delta x'=\Delta y'=\Delta z'=0$$

ولما كان $dS = dS'$ و $\Delta S = \Delta S'$ فإننا نجد بالتبديل في (8.37) أن:

$$\sqrt{c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2} = c\,\Delta t' \qquad (8.39)$$

ويتحقق ذلك من أجل جميع القيم الحقيقية للعبارة التي تحت الجذر، ولذلك تسمى هذه المجالات: المجالات الزمنية المتشابهة.

أما في حال المجال العقدي حيث تكون العبارة المجذورة سالبة في (8.37) فإنه يمكن ايجاد جملة قياس تحدث فيها حادثتان في مكانين مختلفين ولكن في الوقت نفسه $\Delta t = 0$ وشرط تحقيق ذلك هو:

$$\sqrt{c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2} = i\sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2} \qquad (8.40)$$

وهذا ممكن دائماً عندما تكون العبارة المجذورة سالبة وتسمى هذه المجالات المجالات المكانية المتشابهة.

وأخيراً لتعريف الزمن الخاص نفرض جملة عطالية K' تتحرك بسرعة V بالنسبة الى K ولنفرض أنه في نقطة ما (x', y', z') حدثت حادثتان متعاقبتان بفرق زمني قدره dt_0، ونؤكد هنا أن هذا الزمن مقاس بالساعات في الجملة K' ولذلك يسمى بالزمن الخاص، ولنحسب عنصر المجال dS بين الحادثتين فنجد:

$$dS = dS' = \sqrt{c^2(dt_0)^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2} = c\,dt_0 \qquad (8.41)$$

ومنه:

$$dt_0 = \frac{dS}{c}$$

ولما كان كل من dS و c مقداراً لامتغيراً فإن dt_0 هو مقدار لامتغير Invariant ولكي نعبر عن هذا الزمن في الجملة K نبدل dS بقيمتها فنجد:

$$dt_0 = \frac{1}{c}\sqrt{c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2} =$$

$$= dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt$$

ومنه نجد بالاستكمال:

$$t_0 = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \qquad (8.42)$$

حيث v سرعة الجسم، مقاسة في الجملة الثابتة K.

68- "لاتغير" القوانين الفيزيائية بالنسبة لتحويلات لورنتز، الصيغة الرباعية الأبعاد للنظرية النسبية:

طبقاً للنظرية النسبية فإن كل القوانين الفيزيائية يجب أن يعبر عنها بالشكل نفسه في كل الجمل العطالية، وهذا يعني أنها يجب أن تصاغ بحيث لايتغير شكلها عند الانتقال من جملة عطالية إلى أخرى بواسطة تحويلات لورنتز.

إن معادلات الميكانيك النيوتوني، مثلاً، لاتتغير عندما نطبق عليها تحويلات غاليلي كما رأينا سابقاً. ولكنها تأخذ شكلاً آخر عند تطبيق تحويلات لورنتز عليها، إذن يجب اجراء بعض التعديلات عليها عند كتابتها في النظرية النسبية، أما معادلات مكسويل في الكهرطيسية فهي لاتتأثر بتحويلات لورنتز أي أنها صحيحة ولاحاجة لاجراء أي تعديل عليها. ونؤكد هنا أن الفرضية الأولى قد لعبت دوراً هاماً في صياغة كثير من القوانين في نظرية الحقل وميكانيك الكم والنظرية الموجية للحقول وأسهمت إلى حد كبير في تقدم هذه العلوم، لأن هذه الفرضية تؤكد أن جميع القوانين الفيزيائية يجب أن تصاغ بالشكل نفسه في كافة الجمل العطالية.

ويمكننا القول أن خاصة "لاتغير" القوانين الفيزيائية ليست وليدة النظرية النسبية، فقد عرفت الفيزياء الكلاسيكية نوعاً من ذلك فهذه القوانين، مثلاً، يجب أن لاتتغير إذا دورنا المحاور الاحداثية بزاوية ما φ (ايزوتروبية الفراغ) وفي الحقيقة تصاغ بأحد شكلين اثنين:

$$\alpha = \beta \qquad (8.43)$$

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \qquad (8.44)$$

ويتضح مباشرةً من الحالة الأولى، عندما يعبر عن القيم الفيزيائية بكميات سلمية، أن القانون لايتغير عندما تدور المحاور الاحداثية أما في الحالة الثانية حيث يعبر عن القيم الفيزيائية بكميات شعاعية، فإن كلا من $\vec{\alpha}$ و $\vec{\beta}$ يتغير، فإذا فرضنا أن الدوران يتم حول المحور oz فإن كلا من مركبتي نصف القطر الشعاعي على ox و oy ستصبح في الحالة العامة:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \ , \ y = y'\cos\varphi + x'\sin\varphi \quad (8.45)$$

ويتحول كلا من طرفي العلاقتين (8.44) بالعلاقتين السابقتين نفسهما بحيث تبقى هذه المعادلة صحيحة؛ فإذا أخذنا مثلاً معادلة التحريك الأساسية:

$$m\vec{W} = \vec{F}$$

أو بالشكل التحليلي:

$$m\ddot{x} = F_x \ , m\ddot{y} = F_y \ , m\ddot{z} = F_z \qquad (8.46)$$

فإن كلا من الطرفين سيتحول حسب العلاقات (8.45) وبالتالي يبقى قانون نيوتن في التحريك صحيحاً.

هذا ويمكن باختصار، كتابة الشروط كافة التي يجب أن تحققها قوانين الفيزياء الكلاسيكية كمايلي:

1- لاتتغير بالنسبة لتحويلات غاليلي.

2- لاتتغير بالنسبة لانتقالات ودورانات المحاور الاحداثية.

3- لاتتغير إذ غيرنا الزمن t بـــ $t + \Delta t$ أي أن الزمن يسير بصورة مستمرة ومنتظمة.

4- لاتتغير عندما نبدل t بـــ -t وهذا يعني تناظر القوانين الفيزيائية بالنسبة للماضي والمستقبل.

أما في النظرية النسبية فنجد عوضاً عن الشرط الأول الشرط التالي: لاتغير القوانين الفيزيائية بالنسبة لتحويلات لورنتز، ولكنها توافق على الشرطين الثاني والرابع، ومن الواضح أنه ليس للشرط الثالث معنى في النظرية النسبية لأن الزمن مرتبط بالحركة نفسها.

لايجاد الطريقة العامة في الحصول على "اللامتغيرات" النسبية نعود إلى فكرة المجال dS ونفرض متحولاً جديداً عقدياً هو:

$$\tau = i c t \qquad (8.47)$$

فنجد أن المجال dS^2 يصبح:

$$-dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\tau^2 \qquad (8.48)$$

ولنفرض، بدون التوسع في المفاهيم الرياضية، وجود محاور معامدة (x,y,z,t) في فراغ ما رباعي الأبعاد، ونقول بأن تحويلات لورنتز تأخذ شكلاً خطياً في هذا الفراغ الجديد بحيث يبقى المجال dS^2 لامتغيراً، ولبرهان ذلك نفرض كما في السابق أن حركة الجملة K' بالنسبة لـــ K تتم بالاتجاه المشترك للمحورين x و x' وهذا يعني أن z و y يبقيان ثابتين في الجملتين وأن التغير يطرأ فقط على المركبتين τ و x، فلنفرض دوراناً بزاوية ما φ في المستوى (x',τ') تكون العلاقة فيه بين (x,τ) و (x',τ') بالشكل (انظر (8.45)).

$$x = x'\cos\varphi - \tau'\sin\varphi \;,\; \tau = \tau'\cos\varphi + x'\sin\varphi \qquad (8.49)$$

وهاتان العلاقتان صحيحتان بالنسبة لكل نقاط الجملة K' فلنكتبها بالنسبة لمركز هذه الجملة أي في النقطة $x' = 0$ فنجد:

$$x = -\tau'\sin\varphi \quad , \quad \tau = \tau'\cos\varphi \qquad (8.50)$$

ومنه:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{x}{\varphi} = -\frac{x}{ict} = \frac{ix}{ct} = \frac{i}{c}\quad\frac{x}{t} = i\frac{V}{c} \qquad (8.51)$$

حيث V هي السرعة المنتظمة للجملة K' بالنسبة للجملة K وليس من الصعب حساب sinφ و cosφ إذ نجد بسهولة أن:

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ \sin\varphi &= tg\,\varphi\cos\varphi = \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\end{aligned}\right\} \qquad (8.52)$$

ثم نجد بالتبديل في (8.49) أن:

$$x = \frac{x' + i\frac{V^2}{c}\tau'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad \tau = \frac{\tau' + i\frac{V}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (8.53)$$

وإذا بدلنا τ و τ' بقيمتيهما بالنسبة إلى t و t' نجد نفس العلاقات (8.18) أي تحويلات لورنتز وهو المطلوب.

69- **المتجهات في الفراغ رباعي الأبعاد**:

Vectors in four demensions continum

لقد رأينا في الفقرة السابقة كيف أنه بفرض محور جديد τ لقياس الزمن أمكن التعبير عن عنصر المجال dS في الفراغ الرباعي بشكل مجموع مربعات لأربع قيم ثلاث منها dz, dy, dx للمكان وواحدة $d\tau$ للزمن، وبرهنا أن تحويلات لورينتز تؤول إلى دورانات في هذا الفراغ الرباعي.

وسنبحث الآن في خواص المتجهات المعرفة في الساحة الجديدة ولذلك نفرض نصف القطر المتجه r_α كشعاع في الفراغ الرباعي مركباته (x, y, z, τ) ولنطبق تحويلات لورنتز عليه فنجد أنه يتحول طبقاً للعلاقة:

$$r_\alpha = \sum_\beta \gamma_{\alpha\beta}\, r'_\beta \qquad (8.54)$$

إن فهم هذا الرمز يقتضي الرجوع إلى الفراغ الثلاثي الأبعاد؛ فالشعاع $\vec{r'}$ المعرف في هذا الفراغ بمركباته z', y', x' يؤول بعد دوران المحاور الاحداثية oz', oy', ox' إلى متجه $\vec{r}$ مركباته في الجملة الجديدة z, y, x ويمكن

أن تتعين العلاقة بين مركبات المتجه في المجموعتين (K) و (K') باسقاط المتجه $\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ على المحاور الجديدة حيث نجد بسهولة:

$$\left.\begin{aligned} x &= \gamma_{11}x' + \gamma_{12}y' + \gamma_{13}z' \\ y &= \gamma_{21}x' + \gamma_{22}y' + \gamma_{23}z' \\ z &= \gamma_{31}x' + \gamma_{32}y' + \gamma_{33}z' \end{aligned}\right\} \qquad (8.55)$$

أو بالشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad (8.56)$$

مع العلم أن $\gamma_{\alpha\beta}$ هي جيوب التمام الموجهة للمحاور الجديدة بدلالة القديمة. ويمكن اختصار المعادلات الثلاث السابقة بمعادلة واحدة هي العلاقة (8.54) ويمكن أحياناً اختصار الرمز Σ على أن يتم الجمع بالوسيط المكرر أي أن العلاقة السابقة توضع بالشكل:

$$r_\alpha = \gamma_{\alpha\beta}\, r'_\beta \qquad (8.57)$$

وعند دوران المحاور الاحداثية فإن القيمة المطلقة للمتجه $\vec{r}$ لاتتغير أي أن:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = |\vec{r}'| \qquad (8.58)$$

وبالتالي إذا بدلنا المركبات x, y, z بقيمها من (8.55) فإن الشرط (8.58) يصبح مجرد علاقات يجب أن تحققها المقادير $\gamma_{\alpha\beta}$ ومن السهل ملاحظة أن أمثال الجداءات $z'x', y'z'$ يجب أن تساوي الصفر وأن أمثال z'^2, y'^2, x'^2 تساوي الواحد وهكذا نحصل على العلاقات التالية:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \gamma_{\alpha 1}\gamma_{\alpha 2} = 0 \,,\ \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha 2}\gamma_{\alpha 3} = 0 \,,\ \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha 3}\gamma_{\alpha 1} = 0 \qquad (8.59)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \gamma_{\alpha 1}\gamma_{\alpha 1} = 1 \quad \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha 2}\gamma_{\alpha 2} = 1 \quad \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha 3}\gamma_{\alpha 3} = 1 \qquad (8.60)$$

ويمكن أيضاً اختصار العلاقات السابقة بعلاقتين من الشكل:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\lambda} &= 0 \qquad (\beta \neq \lambda) \\ \gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\lambda} &= 1 \qquad (\beta = \lambda) \end{aligned}\right\} \tag{8.61}$$

أو حتى بعلاقة واحدة تسمى أحياناً علاقة التوامد:

$$\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\lambda} = \sigma_{\beta\lambda} \tag{8.62}$$

أما في الفراغ الرباعي فيمكن تطبيق المناقشة السابقة نفسها بفارق وحيد فقط وهو أن الأدلة السابقة α, β, λ ستأخذ أربع قيم موافقة للأبعاد الأربعة (x, y, z, τ).

لنحسب مربع المتجه r_α ونبرهن أنه لايتغير بالدوران فنجد بالاعتماد على (8.57) وعلى (8.62) أن:

$$r_\alpha^2 = r_\alpha r_\alpha = (\gamma_{\alpha\beta} r'_\beta)(\gamma_{\alpha\lambda} r'_\lambda) = \gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\lambda} r'_\beta\, r'_\lambda = r'_\beta\, r'_\lambda\, \delta_{\beta\lambda} = r'_\beta{}^2 \tag{8.63}$$

لنعد الآن إلى الفراغ الرباعي وتدور المحاور في المستوى (x_λ, τ) بزاوية φ فنحصل نتيجة لذلك على العلاقات (8.53) نفسها، وبالتالي فالانتقال من المحاور القديمة الى الجديدة يكافىء التحويل التالي:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{+i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \tau' \end{pmatrix} \tag{8.64}$$

أي أن:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \qquad (8.65)$$

ويمكن التأكد بسهولة أن هذه المصفوفة تحقق الشرط (8.62)، نعمم الآن تعريف المتجه رباعي الأبعاد بقولنا أنه كل متجه a_α تتحول مركباته a_τ, a_z, a_y, a_x عند تدوير المحاور الاحداثية بنفس القانون الذي تتحول فيه مركبات المتجه r_α أي:

$$a_\alpha = \gamma_{\alpha\beta}\, a_\beta \qquad (8.66)$$

وإذا اقتصرنا على الدوران في المستوى (x,τ) فإن المركبات الجديدة تحقق العلاقات:

$$a_x = \frac{a'_x - i\frac{V}{c}a'_\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \;,\; a_y = a'_y$$

$$a_z = a'_z \;,\; a_\tau = \frac{a'_\tau + i\frac{V}{c}a'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (8.67)$$

ولهذه المتجهات رباعية الأبعاد، كما للمتجهات في الفراغ الثلاثي نعرف الجداء العددي:

$$a_\alpha b_\alpha = \vec{a}\,.\,\vec{b} + a_\tau b_\tau = cte \qquad (8.68)$$

حيث c كمية سلمية، ونقول هنا أن المتجهين a_α و b_α متعامدان في الفراغ الرباعي إذا كان جداؤهما العددي في هذا الفراغ يساوي الصفر.

إن أهم خاصة للمتجهات a_α المعرفة في الفراغ الرباعي هي أن مركباتها كميات سلمية وبالتالي لاتتغير بدوران المحاور لاحداثية أي أن:

$$a_\alpha a_\alpha = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z + a_\tau a_\tau = cte \quad (8.69)$$

ويلاحظ أيضاً أن مربع متجه معرف في الفراغ الرباعي لايكون موجباً بالضرورة.

70- **السرعة والتسارع في الفراغ الرباعي**:

تعرف سرعة متحرك في الفراغ الرباعي بالعلاقة:

$$u_\alpha = \frac{dr_\alpha}{dt_0} \quad (8.70)$$

حيث r_α هو متجه مركباته x, y, z, τ و $dt_0 = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}dt$.

من السهل الحصول على مركبات u_α وذلك بتبديل dt_0 بقيمتها حيث نجد:

$$u_x = \frac{dx}{dt_0} = \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt} = \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
$$u_y = \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ u_z = \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ u_\tau = \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (8.71)$$

ويبدو واضحاً أن العلاقات السابقة تؤول إلى مركبات السرعة المعروفة في الميكانيك التقليدي عندما $v \ll c$، أما المركبة الرابعة فلايمكن أن تجد مانؤول إليه في الفراغ الثلاثي الاقليدي لأنها عقدية. ومن السهل البرهان أن مربع متجه السرعة يساوي مقداراً ثابتاً أي أن:

$$u_\alpha^2 = u_\alpha u_\alpha = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_\tau^2 = -c^2 = \text{ ivariant} \quad (8.72)$$

تعرف أخيراً متجه التسارع في الفراغ الرباعي بالعلاقة:

$$W_\alpha = \frac{du_\alpha}{dt_0} \qquad (8.73)$$

لنحسب مركبات W_α فنجد:

$$W_x = \frac{du_x}{dt_0} = \frac{du_x}{dt}\frac{dt}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ومنه:

$$W_x = \frac{\dot{v}_x}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{v_x(\vec{v}.\dot{\vec{v}})}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})^2} \qquad (8.74)$$

وكذلك نجد:

$$W_y = \frac{\dot{v}_y}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{v_y(\vec{v}.\dot{\vec{v}})}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})^2}$$

$$(8.75)$$

$$W_z = \frac{\dot{v}_z}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{v_z(\vec{v}.\dot{\vec{v}})}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})^2}$$

أما المركبة الرابعة للتسارع فنحصل عليها بالطريقة نفسها ويكون:

$$W_\tau = \frac{du_\tau}{dt_0} = \frac{du_\tau}{dt}\frac{dt}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\frac{d}{dt}\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}}} = \frac{i}{c}\frac{(\vec{v}.\dot{\vec{v}})}{(1-\frac{v^2}{c^2})^2} \qquad (8.76)$$

وأخيراً نلاحظ أنه باشتقاق (8.72) اشتقاقاً كلياً بالنسبة للزمن الخاص نحصل على العلاقة الهامة:

$$u_x\frac{du_x}{dt_0} + u_y\frac{du_y}{dt_0} + u_z\frac{du_z}{dt_0} + u_\tau\frac{du_\tau}{dt_0} = 0 \qquad (8.77)$$

أي أن السرعة والتسارع متعامدان في الفراغ الرباعي، لأن جداؤهما العددي، طبقاً للتعريف (8.68)، يساوي الصفر.

مسائل الفصل الثامن

1- برهن صحة العلاقات (8.18) انطلاقاً من (8.18,a).

2- تسير سفينة فضائية بسرعة $300\,m/sec$ ماهو الزمن اللازم لكي يختلف توقيت ساعة موجودة فيها عن ساعة موجودة على الأرض بمقدار ثانية واحدة؟

3- اذا كانت ρ كتلة واحدة الحجوم (الكتلة النوعية) لجسم بالنسبة الى مراقب ثابت مع الجسم فاوجد هذه الكتلة النوعية عندما يتحرك الجسم بالنسبة للمراقب بسرعة 0,9 C.

أوجد الكتلة النوعية لعنصر الذهب عندما يتحرك بالنسبة لمراقب بسرعة 0,9C مع العلم أن كتلته النوعية في حالة السكون تساوي $19{,}3\,gr/cm^3$.

4- يطلق اسم ظاهرة دوبلر على التغير الحاصل في تواتر أمواج حركة اهتزازية نتيجة حركة المنبع الباعث لها أو حركة المراقب الذي يتلقاها.

ادرس هذه الظاهرة بالنسبة للأمواج الضوئية انطلاقاً من تحويلات غاليلي مميزاً جميع حالات اقتراب وابتعاد المنبع والمراقب عن بعضهما.

5- ظاهرة دوبلر في الميكانيك النسبي:

أ- ظاهرة دوبلر الطولانية: ينبعث ضوء تواتره υ من منبع ضوئي ساكن I ويقيس مراقب متحرك بسرعة v باتجاه انتشار الضوء مبتعداً عن المنبع I، تواتراً ν' للضوء الصادر عن هذا المنبع، فإذا اعتبرنا أن I هو ساعة تدق υ دقة كل ثانية وتصدر ومضة ضوئية في كل منها فبرهن أن:

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}$$

ب- ظاهرة دوبلر العرضانية: اذا حدثت الحركة باتجاه متعامد مع انتشار الضوء وبالسرعة نفسها v فبرهن أن:

$$\nu' = \nu \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

6- تحلق طائرة طولها 10 m بسرعة قدرها 300 m/sec، ماهو طول هذه الطائرة الذي يقيسه مراقب على الأرض وبعد كم من الزمن تقصر ساعة الطيار 10^{-3} sec عن ساعة مراقب على الأرض.

7- يبتعد نجم عن الأرض بسرعة $50\,\text{km/sec}$ ويطلق ضوءاً طول موجته $6563\,A^{\circ}$، ماهو مقدار تغير طول موجة هذا الضوء عندما يقاس على الأرض؟.

8- يميل القضيب AB الذي طوله L بزاوية θ على المحور ox في الجملة K، احسب طول هذا القضيب 'L وزاوية ميلانه 'θ على 'ox في الجملة 'K، التي تتحرك بسرعة V بالنسبة للجملة K.

9- برهن أن عنصر الحجم في الفراغ الرباعي هو لامتغير فيزيائي أي أن:

$$\Delta x\, \Delta y\, \Delta z\;\, \Delta\tau = \Delta x'\, \Delta y'\, \Delta z'\, \Delta\tau'$$

10- نفرض نجماً موجوداً في مستوى الأفق وعلى مسافة 10^6 سنة ضوئية ولنفرض أن مراقباً موجوداً على الأرض يرى في نفس اللحظة

ظاهرتين احداهما تحدث على سطح الأرض والأخرى على سطح النجم. احسب الفاصل الزمني بين الظاهرتين بالنسبة لإنسان يتحرك بسرعة $6\,km/sec$ باتجاه النجم.

11- تتحرك مسطرتان، طول كل منهما ℓ في الجملة الساكنة، بسرعة v لكل منهما باتجاهين مختلفين، اوجد طول كل منهما في جملة احداثية مرتبطة بالأخرى.

12- ينطلق بروتون من الشمس باتجاه الأرض قاطعاً مسافة $1{,}5.10^8\,km$ بسرعة $\frac{4c}{5}$. كم تبلغ هذه المسافة بالنسبة لمراقب مرتبط بالبروتون وماهو الزمن اللازم لقطعها بالنسبة لمراقبين أحدهما مرتبط بالأرض والآخر مرتبط بالبروتون؟.

الفصل التاسع

ميكانيك النظرية النسبية

71- **كمية الحركة في الفراغ الرباعي**:

إن مفهوم النقطة المادية في الميكانيك يعني جسماً أبعاده صغيرة جداً بحيث يمكن اهمالها وهذا مانسميه جسيماً.

اذا تحرك جسيم بحركة منتظمة في احدى الجمل العطالية فإن الحركة ستبقى منتظمة عند الانتقال الى جملة أخرى بوا سطة تحويلات لورنتز وهذا مايؤكد أن قانون العطالة هو لامتغير نسبي. ويمكن التأكد من ذلك بسهولة بوضع $\frac{d^2x}{dt^2}$ ثم بتبديل x بقيمتها بدلالة x' من (8.18b) فنحصل على $\frac{d^2x'}{dt'^2}=0$. ولكن معادلات الحركة المطبقة في الميكانيك التقليدي تتغير عند الانتقال من جملة عطالية إلى أخرى بوا سطة تحويلات لورنتز (مع العلم أنها لاتتغير عند تطبيق تحويلات غاليلي عليها – انظر الفصل السابق). ويمكن التأكد من ذلك بسهولة بكتابة مسقط معادلة الحركة على المحور ox مثلاً، $F_x=\frac{md^2x}{dt^2}$ ثم تبديل x ومشتقاتها بدلالة x' و t' من تحويلات لورنتز فنجد أننا لانحصل على صيغة من الشكل $F'_x=m\frac{d^2x'}{dt'^2}$، ولهذا، طبقاً للفرضية الثانية، لايمكن استخدام هذه المعادلة في النظرية النسبية، ولابد من البحث عن صيغة جديدة لها، ولتحقيق ذلك نلجأ إلى الفراغ الرباعي ونفرض جسيماً كتلتة السكونية له m ونؤكد على كتلة السكون هذه لأنها كما سنرى فيما بعد، تعتبر

صفة أساسية من صفات الجسيمات، فهي احدى ميزات الجسيم، الشخصية، أو احد عناصر هويته، ولايمكن مطلقاً أن يشترك جسيمان في نفس الكتلة، ونعرف كمية الحركة في الفراغ الرباعي بالعلاقة:

$$P_\alpha = m u_\alpha \tag{9.1}$$

حيث u_α هي سرعة الجسيم في الفراغ الرباعي المعرفة في الفصل السابق (العلاقة (8.70))، وبالاسقاط على المحاور الأربعة للفراغ الرباعي نحصل على المركبات الأربع التالية:

$$\left.\begin{aligned} P_x = m u_x = \frac{m v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ P_y = m u_y = \frac{m v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ P_z = m u_z = \frac{m v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ P_\tau = m u_\tau = \frac{i m C}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

ويبدو واضحاً أن كلاً من هذه المركبات يؤول إلى ما يقابله في النظرية الكلاسيكية أي إلى mv_z, mv_y, mv_x عندما $v << c$ على الترتيب أما المركبة الرابعة فليس لها ما يقابلها في الفراغ الاقليدي لأنها عقدية صرفة.

72- **معادلة الحركة في ميكانيك النظرية النسبية**:

من الطبيعي الآن تعميم معادلة الحركة بالشكل:

$$\frac{dp_\alpha}{dt_0} = \frac{d}{dt_0} m u_\alpha = F_\alpha \quad (\alpha = 1,2,3,4 \Leftrightarrow x,y,z,\tau) \tag{9.3}$$

حيث F_α متجه معرف في الفراغ الرباعي يسمى القوة رباعية الأبعاد، أو قوة مينكوفسكي. لنكتب معادلة الحركة على المحور ox اعتماداً على (9.3) فنجد:

$$\frac{dp_x}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{m v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_x$$

أو بالشكل:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (9.4)$$

حيث F_x هي مركبة القوة المؤثرة في الجسيم، على المحور ox في الفراغ الرباعي ولايجاد العلاقة بين F_x و $\mathbf{F_x}$ (مركبة القوة في الفراغ الثلاثي على المحور ox) تتطلب أن يتحول الطرف الثاني عندما $v << c$ الى القوة **F** ولهذا يجب أن يكون:

$$\mathbf{F}_x = F_x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (9.5)$$

وعندئذٍ توضع المعادلة (9.4) بالشكل التالي:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{F}_x \qquad (9.6)$$

ويبدو بوضوح أن المعادلة (9.6) تؤول إلى معادلة نيوتن المقابلة $m\ddot{x} = F_x$ عندما $v << c$.

أما معادلتا الحركة على المحورين oy و oz فتوضعان بشكل مشابه حيث نجد:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{F}_y \;,\; \frac{d}{dt}\frac{mv_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{F}_z \qquad (9.7)$$

وللحصول على معادلة الحركة على المحور التخيلي τ نبدل P_τ بقيمتها من (9.2) فنجد:

$$\frac{d}{dt}\frac{icm}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_\tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (9.8)$$

لنبحث عن المعنى الفيزيائي لمركبة القوة على المحور τ لذا نضرب (9.3) عددياً u_α ثم نجمع فنجد بالاعتماد على (8.77):

$$u_\alpha \frac{dmu_\alpha}{dt_0} = F_\alpha u_\alpha = F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z + F_\tau u_\tau = 0 \quad (9.9)$$

واذا بدلنا المقادير F_α و u_α بقيمها من العلاقات السابقة فإننا نحصل على المعادلة:

$$\mathbf{F}_x \frac{v_x}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{\mathbf{F}_y v_y}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{\mathbf{F}_z v_z}{1-\frac{v^2}{c^2}} = F_\tau \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0 \qquad (9.10)$$

ومن الواضح أن الحدود الثلاثة الأولى ليست إلا الجداء العددي $\vec{\mathbf{F}}.\vec{v}$ في الفراغ الثلاثي، وعندئذٍ نجد من (9.10) بعد الاختصار على $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

وضرب الطرفين بـــ $\frac{i}{c}$ المعادلة:

$$F_\tau \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{i}{c}(\vec{\mathbf{F}}.\vec{v}) \qquad (9.11)$$

غير أن المقدار $\vec{\mathbf{F}}.\vec{v}$ هو العمل الذي تنجزه القوة $\vec{\mathbf{F}}$ في واحدة الزمن (الاستطاعة). وهكذا ترتبط المركبة F_τ بعمل القوة $\vec{\mathbf{F}}$ في الفراغ الثلاثي بالعلاقة:

$$F_\tau = \frac{i}{c} \frac{(\vec{\mathbf{F}}.\vec{v})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (9.12)$$

ويمكن الآن وضع المعادلة (9.8) بعد تبديل F_τ بقيمتها من (9.12) بالشكل:

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (\vec{\mathbf{F}}.\vec{v}) = \frac{dA}{dt} \qquad (9.13)$$

وبما أن الطرف الأيمن هو الاستطاعة فمن الطبيعي أن نفرض، انطلاقاً من مفاهيم الميكانيك التقيدي، أن المقدار $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ هو الطاقة الحركية التي نرمز لها بالرمز E هنا (وليس T كما فعلنا سابقاً لأسباب تتضح فيما بعد) أي أن:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{9.14}$$

لنبحث أخيراً عن صيغة للتسارع $\vec{W}$ وعلاقته بالقوة $\vec{F}$، لذا نضع معادلات الحركة (9.6) و (9.7) بالشكل الشعاعي التالي:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{v}{c^2}\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec{F} \tag{9.15}$$

أو بالشكل:

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{c^2}\frac{dE}{dt} = \vec{F} \tag{9.16}$$

ومنه نحصل على $\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ونضعه اعتماداً على (9.13) بالشكل:

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m}\left[\vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{F}\cdot\vec{v})\right] \tag{9.17}$$

ويبدو واضحاً أن $\vec{W}$ يؤول إلى $\frac{\mathbf{F}}{m}$؛ أي إلى القيمة المقابلة في الميكانيك التقليدي عندما $v << c$.

73- العلاقة بين كمية الحركة والطاقة والكتلة في ميكانيك النظرية النسبية:

سندرس الآن خواص الكميات التي عرّفناها في الفقرتين السابقتين:

لذا نكتب أولاً العلاقة بين كتلة السكون m وكمية الحركة في الفراغ الثلاثي طبقاً لــ (9.2) حيث نجد:

$$\vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (9.18)$$

وهي تؤول إلى العلاقة الكلاسيكية عندما $v << c$. ومن هنا يمكن أن نفكر أن m قد تتطابق مع كتلة الجسيم المتحرك بسرعة غير كبيرة، ولكن الحقيقة غير ذلك، وليست بهذه البساطة كما سيتضح فيمايلي:

ان خواص كتلة السكون للجسيم تختلف تماماً عن خواصها في الميكانيك التقليدي فمثلاً أن m لاتحقق قانون حفظ الكتلة، وهناك الكثير من الظواهر الفيزيائية التي تبين ذلك، هذا بالإضافة إلى أن الكتلة m نفسها لاتوجد عند بعض الجسيمات كالفوتونات وبعض الجسيمات الأساسية كالنيترينو مثلاً. وهذا يعني أنه إذا حدث تفاعل ما بحيث نتج في نهايته جسيمات كتلها الساكنة تساوي الصفر فإن قانون حفظ الكتلة المعروف لن يتحقق. ونذكر مثالاً على ذلك: انتاج الأزواج في غرفة ويلسون وفناء الالكترون والبوزيترون ليكونا معاً فوتوناً ضوئياً. وقد برهنت تجارب الفيزياء النووية، وخصوصاً تلك التي أجريت في مجالات الجسيمات الأساسية، أن كتلة السكون المعرفة في بداية هذا الفصل تؤلف احدى الخواص الأساسية للجسيمات بشكل عام وهي لاتتغير في كل التفاعلات التي تشارك فيها.

لذلك كله كان لابد من توضيح مفهوم الكتلة في النظرية النسبية بشكل جيد، لذا نفرض أن كتلة الجسيم تابعة لسرعته أي $m = m(v)$ وتعرف بأنها عامل التناسب ما بين السرعة وكمية الحركة وتوضع بالشكل:

$$\vec{P} = m(v)\vec{v} \quad , \quad m(v) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (9.19)$$

وهكذا فإن مفهوم الكتلة يتوقف على السرعة، ولكن يجب الملاحظة أيضاً أن $m(v)$ ليست مقداراً لامتغيراً بسبب تغير $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. فإذا تحرك جسيم بسرعتين مختلفين بالنسبة إلى جملتي قياس مختلفين فإن كتلته ستختلف في الجملتين.

لندرس الآن خواص الطاقة الكلية المعرفة بالعلاقة (9.14) فنجد منها ومن العلاقة الأخيرة من (9.2) مايلي:

$$F_\tau = i\frac{E}{c} \qquad (9.20)$$

وهكذا فإن المركبة الزمنية لكمية الحركة تساوي الطاقة (بالتقريب إلى ثابت التناسب). وأهمية هذه العلاقة (9.20) تكمن في أن كمية الحركة في الفراغ الرباعي توضع بالشكل:

$$P_\alpha(P_x, P_y, P_z, i\frac{E}{c}) \qquad (9.21)$$

وهذه المركبات ليست لامتغيرات نسبية وإنما تتغير بتحويلات طبقاً للمعادلات العامة (8.67)؛ أي بالشكل:

$$P_x = \frac{P'_x + \frac{E'}{c^2}V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad P_y = P'_y \quad , \quad P_z = P'_z$$

$$E = \frac{P_\tau c}{i} = \frac{E' + VP'_x}{1-\frac{V^2}{c^2}} \qquad (9.22)$$

حيث V هي السرعة النسبية للجملتين.

أما اللامتغيرات النسبية هنا فهي مربع المتجه P_α المعرف في الفراغ الرباعي (انظر (8.69)) أي:

$$\text{invariant} \sum_\alpha P_\alpha^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + P_\tau^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = \quad (9.23)$$

ولحساب قيمة هذا اللامتغير نبدل مركبات P_α بقيمها فنجد:

$$\sum_\alpha P_\alpha^2 = \frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = -m^2c^2 \qquad (9.24)$$

لنعد الآن إلى عبارة الطاقة و ننشر E عندما $v << c$ فنجد:

$$E = mc^2(1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} = mc^2(1+\frac{v^2}{2c^2}+....) = mc^2 + \frac{mv^2}{2} \quad (9.25)$$

والحد الثاني يتطابق مع الطاقة الحركية للجسيم، ولكن عندما $v = 0$ فإن طاقة الجسيم E_0 غير الموجود في أي حقل قوى تعطى بالعلاقة:

$$E_0 = mc^2 \neq 0 \qquad (9.26)$$

وهي احدى النتائج الهامة للنظرية النسبية، إذ أن طاقة الجسيم الساكن لاتساوي الصفر، وكثيراً ما تسمى الطاقة E_0 طاقة السكون Rest Energy. وقد تظهر هذه النتيجة غريبة للوهلة الأولى وقد يصعب علينا فهم أن طاقة الجسيم الساكن غير الخاضع لأي تأثير خارجي لاتساوي الصفر، مما يدعونا إلى الشك أن تعريف الطاقة بالعلاقة (9.14) غير صحيح وأنه كان يجب اضافة ثابت ما هو $-mc^2$ بحيث يختصر مع الثابت mc^2 الموجود في (9.25) وتنعدم طاقة الجسيم الساكن عندما $v \to 0$. ولكن الحقيقة هي غير ذلك ولايمكن أن نطلب دائماً من العلاقات النسبية أن تؤول إلى العلاقات الكلاسيكية المقابلة لها عندما $v << c$، ولكن، وبدون شك، يمكن أن نؤكد أن تحويلات لورنتز يجب أن تؤول إلى تحويلات غاليلي (هذا الشيء الموجود في صلب النظرية النسبية) وبصورة خاصة يجب أن تتحول المعادلات (9.22) إلى علاقات تركيب السرع في الميكانيك التقليدي، فإذا فرضنا جسيماً سرعته v' في جملة عطالية K' تتحرك

بدورها بسرعة $V\ (V \ll c)$ وكانت $v' \ll c$ أيضاً فإن طاقته E'، طبقاً للعلاقة (9.25)، تساوي تقريباً mc^2 $(E \approx mc^2)$. وإذا عوضنا هذه القيمة في العلاقة الأولى من تحويلات لورنتز (9.22) في الفراغ الرباعي فإننا نجد:

$$P_x = P'_x + \frac{mc^2}{c^2} V = P'_x + mV \qquad (9.27)$$

ومنه نحصل على علاقة تركيب السرع المعروفة في الميكانيك الكلاسيكي وهي:

$$v_x = v'_x + V$$

أما إذا تجاهلنا طاقة الجسيم الساكن mc^2 ووضعناها تساوي الصفر فإننا نجد من (9.22) أن $Px = P'_x$ و $v_x = v'_x$ وهذا غير معقول، مما يؤكد أن طاقة الجسيم الساكن لاتساوي الصفر فعلاً، أما طاقة الجسيم المتحرك بسرعة v فتوضع، طبقاً لـــ (9.14)، بالشكل:

$$E = m(v)c^2 \qquad (9.28)$$

وكثيراً ماتسمى المعادلتان (9.26) و (9.28) معادلتي اينشتاين، وهما تؤكدان أن للجسيم الذي كتلته m طاقة E وأن الكتلة والطاقة متلازمان تماماً ومتناسبان مع بعضهما البعض وانهما وجهان مختلفان لشيء واحد، وهذا مايسمى أحياناً بقانون تكافؤ الكتلة والطاقة، ذلك القانون الذي أثبتت التجارب صحته بحيث لايرقى إليه الشك حتى الآن.

إن احدى النتائج الهامة أيضاً للنظرية النسبية هي جمع قانوني مصونية الطاقة ومصونية كمية الحركة في قانون واحد، ولتوضيح ذلك نفرض مجموعة معزولة (لاتؤثر عليها أية قوى خارجية) وبالتالي ستكون طاقتها الكلية وكمية حركتها مصونتان أي:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = E_0 \qquad (9.29)$$

$$\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow P = P_0 \qquad (9.30)$$

ويمكن التأكد أن القانون الثاني سيكون نتيجة طبيعية للقانون الأول اذا لاحظنا العلاقة (9.28) التي تبين أنه عندما $E = const$ فإن $m(v) = const.$ مما ينتج عنه ثبات السرعة $\vec{v}$ و بالتالي مصونية $m\vec{v}$. أما في النظرية الكلاسيكية فكلاً من القانونين مستقل عن الآخر.

والجدير بالذكر أنه كثيراً مانستخدم الرمز E_{kin} للتعبير عن الطاقة الحركية في النظرية النسبية بدلاً من الرمز T المستخدم في الميكانيك التقليدي حيث:

$$E_{kin} = E - mc^2 = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right] = [m(v) - m]c^2 \quad (9.31)$$

ومن المفيد في نهاية هذه الفقرة استنتاج العلاقة الهامة التي تربط الطاقة وكمية الحركة وذلك من العلاقتين (9.14) و (9.18) حيث نجد:

$$\vec{P} = \frac{E}{c^2}\vec{v} \quad (9.32)$$

حيث $\vec{P}$ كمية حركة الجسيم في الفراغ الثلاثي، E طاقته و $\vec{v}$ سرعته.

74- تابع لاغرانج، معادلات لاغرانج وتابع هاملتون في النظرية النسبية:

لقد رأينا سابقاً كيف تكتب معادلات الحركة بشكل بسيط في الميكانيك الكلاسيكي وسنعمم ذلك في النظرية النسبية، لذا نشكل تابع لاغرانج الذي يساوي $T - V$ تعريفاً والذي مشتقه بالنسبة للاحداثيات يساوي القوة المؤثرة أما مشتقه بالنسبة للسرع المعممة فيساوي كمية الحركة، فمثلاً إذا أخذنا تابع لاغرانج لجسيم يتحرك على المحور ox حركة ذات بعد واحد) فإن تابع لاغرانج له هو:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\overset{\bullet}{x}^2 - V(x)$$

حيث $V(x)$ هو الكمون التي تشتق منه القوة المسببة للحركة، نلاحظ أن:

$$\frac{\partial L}{\partial x^{\bullet}} = mx^{\bullet} = P_x \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -(\text{grad}\, V)_x = F_x$$

وسنستفيد من الخاصتين المذكورتين لايجاد L في النظرية النسبية لذا نأخذ التابع:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - V(q_j) \qquad (9.33)$$

وبالفعل نلاحظ أن L هذا يحقق هاتين الخاصتين لأن:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec{P} \ , \ \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = (\text{grad}\, V)_j = -\mathbf{F}_j \quad (9.34)$$

وبالتالي يمكن اعتبار L المعرف بالعلاقة (9.33) بمثابة تابع لاغرانج في النظرية النسبية، أما معادلة الحركة فتوضع بالشكل:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_j^{\bullet}} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (9.35)$$

وللحصول على تابع هاملتون ننطلق من تعريف (8.45) حيث نجد:

$$H = \sum P_j q_j^{\bullet} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + V(q_j)$$

ومنه:

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + V(q_j) \qquad (9.36)$$

وقد رأينا سابقاً أنه لابد من التعبير عن تابع هاملتون بدلالة المتحولات القانونية P_j و q_j لذا يجب حساب v^2 بدلالة P^2 من العلاقات (9.2) حيث نجد بتربيع الثلاث الأولى:

$$P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ومنه:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{p^2}{P^2 + m^2 c^2}$$

وبالتبديل في (9.36) نحصل أخيراً على تابع هاملتون التالي:

$$H = \sqrt{P^2 c^2 + m^2 c^4} + V(q_j) \qquad (9.37)$$

وهذا التابع يجب أن يتطابق مع الطاقة الكلية لأن القوى كمونية.

لندرس الحالة الخاصة الهامة وهي عندما يكون $P >> mc$ حيث يمكن وضع تابع هاملتون بالشكل:

$$H \approx Pc \qquad (9.38)$$

إن هذه الحالة التي تحدث عندما يكون اندفاع الجسيم (وبالتالي سرعته) كبير جداً تسمى الحالة فوق النسبية aultra-relativistic ومن البديهي أن العلاقة (9.38) هي علاقة صحيحة تماماً وليست تقريبية عندما تنعدم كتلة الجسيم وتستخدم الصورة خاصة، في الدراسة الحركية للحوادث الفيزيائية التي تشارك فيها الفوتونات الضوئية.

75- **قانون مصونية الطاقة- كمية الحركة في الفيزياء النووية**:

لم تبرهن النتائج التجريبية في الفيزياء الحديثة على صحة قانون حفظ الطاقة وكمية الحركة في النظرية النسبية فحسب، وانما تعدى ذلك إلى أن هذا القانون أصبح أحد المبادىء الأساسية في الفيزياء النووية، وسنقتصر هنا على بعض الأمثلة التي تبين ضرورة الاعتماد على نتائج الميكانيك النسبي لدراسة الحوادث التي تجرى في النواة ودراسة الجسيمات الأساسية Elementary Particles.

آ- انقسام الجسيمات الذاتي:

سنرى كيف أن قانون حفظ الطاقة يضع شروطاً معينة لامكانية هذا الانقسام، لذا ندرس انقسام جسيم ما كتلته m الى جسمين ذوى كتلتين مختلفتين m_1 و m_2. ولندرس الحادثة في مجموعة احداثية مركزها يقع في مركز ثقل الجسيم المنقسم وهو ساكن (مجموعة مركز الكتلة).

وهكذا تتعدم كمية الحركة الكلية قبل الانقسام وبعده، ويبقى مربع المتجه P_α، المعرف في الفراغ الرباعي ثابتاً أيضاً ويساوي، طبقاً لــ (9.2):

$$I = P^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2c^2$$

ومنه:

$$P^2c^2 - E^2 = -m^2c^4 \qquad (9.39)$$

فإذا رمزنا لكمية حركة كل من الجسيمين الناتجين بــ $\vec{P_1}$ و $\vec{P_2}$ (في الفراغ الثلاثي) فإن مجموعهما يجب أن يساوي الصفر أيضاً بعد الانقسام أي:

$$\vec{P_1} + \vec{P_2} = 0$$

بفرض أن E_1 و E_2 هما طاقتا الجسيمين، ثم بالتبديل في (9.39) نجــد المعادلة:

$$(\vec{P_1} + \vec{P_2})^2 c^2 - (E_1 + E_2)^2 = -m^2c^4$$

أو:

$$mc^2 = E_1 + E_2 \qquad (9.40)$$

وإذا فرضنا أن:

$$E^{(1)} = E_{kin}^{(1)} + m_1c^2 \ , \ E^{(2)} = E_{kin}^{(2)} + m_2c^2 \qquad (9.41)$$

فإن (9.40) توضع بالشكل:

$$mc^2 = (m_1 + m_2)c^2 + E_{kin}^{(1)} + E_{kin}^{(2)} \qquad (9.42)$$

وبما أن كلاً من $E_{kin}^{(2)}$ و $E_{kin}^{(1)}$ مقداران موجبان فلابد لكي يحدث الانقسام السابق أن يكون:

$$mc^2 > (m_1 + m_2)c^2 \Rightarrow m > m_1 + m_2 \qquad (9.43)$$

وهذا يعني أنه لايمكن للجسيم أن ينقسم من تلقاء نفسه إلا إذا كانت كتلته أكبر من مجموعة كتلتي الجسيمين الناتجين عن انقسامه. ومن الواضح أن قانون حفظ الكتلة بالمعنى الكلاسيكي غير محقق هنا.

أما عندما $m < m_1 + m_2$ فلابد من صرف طاقة خارجية لتحقيق الانقسام الذاتي بحيث يتم التغلب بواسطتها على طاقة ربط الجسيمين m_1 و m_2 داخل الجسيم m، ويصرف المقدار الباقي من الطاقة على اكسابهما الطاقة الحركية $E_{kin}^{(1)}$ و $E_{kin}^{(2)}$.

لنحسب الآن طاقتي الجسيمين الناتجين عن الانقسام فنلاحظ أولاً أن $|P_1| = |P_2|$ وبالتالي $P_1^2 = P_2^2$ ونستفيد من العلاقتين:

$$E_1 = \sqrt{P_1^2 c^2 + m_1^2 c^4} \quad , \quad E_2 = \sqrt{P_2^2 c^2 + m_2^2 c^4}$$

فمن الثانية نجد:

$$E_2^2 = P_2^2 c^2 + m_2^2 c^4 = P_1^2 c^2 + m_2^2 c^4 = E_1^2 - m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4$$

أو:

$$E_2^2 = E_1^2 + m_2^2 c^4 = m_1^2 c^4 \qquad (9.44)$$

ومن (9.40) نجد:

$$E_1^2 = (mc^2 - E_2)^2 \qquad (9.45)$$

والمعادلتان (9.44) و (9.45) هما معادلتان جبريتان بالنسبة E_1 و E_2 بحلها نحصل على كل منهما حيث نجد أخيراً:

$$E_1 = \frac{(m^2 - m_2^2 + m_1^2)c^2}{2m} \quad , \quad E_2 = \frac{(m^2 - m_1^2 + m_2^2)c^2}{2m} \qquad (9.46)$$

ب- استقرار النويات الذرية:

ان استقرار نواة ما يعني عدم امكانية انقسامها في الوقت الحاضر على الأقل، وسنرى الآن، انطلاقاً من قوانين الميكانيك النسبي أنه يمكن ايجاد الشرط الأساسي لهذا الاستقرار.

لتكن النواة X التي كتلتها m وتحوي Z بروتونا و A نوكلوناً (بروتون أو نترون) و A-Z نتروناً، ومن المعلوم أن النوكلونات تبقى في حركة دائمة ضمن النواة وبالرغم من ذلك تظل مرتبطة مع بعضها البعض تحت تأثير الكمون النووي القوي.

واذا كانت طاقة السكون للنواة ككل تساوي mc^2 وطاقة السكون لكل النوكلونات في داخلها تساوي $\sum m_i c^2$ فمن الواضح أن شرط انقسام هذه النواة الى مكوناتها ذات الكتل m_i ليس الا تعميماً مباشراً لما رأيناه في الفقرة السابقة أي:

$$mc^2 > \sum m_i c^2 \qquad (9.47)$$

ان شرط استقرارها فهو:

$$\sum m_i c^2 > mc^2 \qquad (9.48)$$

ويعرف طاقة ارتباط النواة بالعلاقة:

$$\Delta mc^2 = \sum m_i c^2 - mc^2$$

فإذا كان سالباً فإن النواة يمكن أن تنقسم ذاتياً، أما إذا كان موجباً فلاتنقسم إلا باضافة طاقة من الخارج ويتم ذلك بقذفها بجسيم آخر طاقته أكبر من طاقة الارتباط. ويسمى المقدار:

$$\Delta m = \sum m_i - m \qquad (9.49)$$

نقص الكتلة، وهو يعطينا فكرة أيضاً عن استقرار النواة، ونؤكد هنا أن الشرط (9.47) غير كاف لانقسام النواة ويجب أن يتحقق أيضاً مايسمى قانون مصونية الشحنة الكهربائية وعدد النوكلونات والعزم الكتلي $\vec{j}$ أي أنه عند انقسام نواة كتلتها m إلى قسمين كتلتاهما m_1 و m_2 يجب أن تتحقق العلاقات التالية:

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \ , \ Z_1 + Z_2 = Z \ , \ A = A_1 + A_2 \qquad (9.50)$$

حيث $\vec{j}_i$ هو العزم الكلي للجسيم i $(i = 1,2)$ و J العزم الكلي للجسيم المنقسم، و A عدد النوكلونات، و Z عدد البروتونات.

لنأخذ مثالاً على ماسبق:

لتكن نواة البيريليوم Be_4^8 التي كتلتها $m = 8{,}00785\ a.u.m$ أصغر من مجموع البروتونات الأربعة والنترونات الأربعة المكونة لها، أي أن:

$$\sum m_i = 4 \times 1{,}008123 + 4 \times 1{,}00893 = 8{,}0682121 \ > m$$

وبالتالي تعتبر هذه النواة مستقرة بالنسبة للانقسام الى ثمانية نوكلونات أما إذا حسبنا امكانية انقسامها الى نواتي هيليوم كتلة كلٍ منهما 4,0039 أي أن مجموع كتلتيهما:

$$\sum m_i = 2 \times 40039 = 8{,}00780\ a.u.m$$

وهكذا نجد أن $\sum m_i < m$ وبالتالي تعتبر نواة البيريليوم Be_4^8 قلقة بالنسبة لانقسامها إلى نواتي هيليوم، وهي تنقسم طوعياً إلى $2He_2^4$. ولكن إذا أخذنا نظيراً آخر للهليوم هو Be_4^9 وحسبنا امكانية انقسامه لأي من الأجزاء التي يتكون منها فإننا نلاحظ دائماً أن $\sum m_i > m$ وبالتالي فإن نواة Be_4^9 تكون مستقرة ولاتنقسم من تلقاء نفسها أبداً. وهكذا يمكن معرفة امكانية انقسام واستقرار النويات الذرية بعد معرفة الكتل التي تتألف منها.

ج- الطاقة الناتجة عن التفاعلات النووية:

ليكن التفاعل:

$$A + B = C + D \qquad (9.51)$$

ولنحسب الطاقة الناتجة عنه اعتماداً على مفاهيم النظرية النسبية، لذا نستفيد من قانون حفظ الطاقة الذي يوضع بالشكل:

$$E_{kin}^{(A)} + M_A C^2 + E_{kin}^{(B)} + m_B C^2 = E_{kin}^{(C)} + m_C C^2 + E_{kin}^{(D)} + m_D c^2 \quad (9.52)$$

ويهمنا من ذلك المقدار Q الناتج عن فرق الكتلة الذي يساوي:

$$Q = \left[(M_A + M_B) - (M_C + M_D)C^2\right] \qquad (9.53)$$

الذي يحسب بسهولة إذا علمنا كتل النويات المشاركة عن التفاعل والناتجة عنه. يتحقق التفاعل السابق عادةً بقذف النواة B التي تعتبر ساكنة $E_{kin}^{(B)} = 0$ بواسطة النواة ذات الطاقة المعلومة. أما الطاقة الحركية لكل من النواتين الناتجتين فيمكن قياسها وبالتالي حساب المقدار Q من العلاقة (9.52) وبمقارنته مع العلاقة (9.53) يمكن التحقق من قانون تعادل الطاقة والكتلة.

لندرس على سبيل المثال التفاعل النووي:

$$Li_3^7 + H_1^1 \longrightarrow 2He_2^4 \qquad (9.54)$$

إن كتل النوى المشاركة في التفاعل وهي الليتيوم والهيدروجين، مقاسة بدرجة ممتازة من الدقة هي:

$$m(Li_3^7) = 7{,}01822 \text{ a.u.m} \;,\; m(H_1^1) = 1{,}00812 \text{ a.u.m}$$

ومجموع كتلتيهما يساوي 8,02634 a.u.m أما الكتلة الناتجة عن التفاعل فهي:

$$2m(He_2^2) = 2 \times 4{,}0039 = 8{,}0078 \text{ a.u.m}$$

أما فرق الكتلة فهو: $\Delta m = 0{,}0185 \text{ a.u.m}$ والطاقة المقابلة له:

$$E = \Delta mc^2 = 17{,}2 \text{ MeV} \qquad (9.55)$$

وهذه القيمة تتوافق مع القيمة المقاسة تجريبياً، مع العلم أننا استخدمنا في الحسابات المعطيات التالية:

$$1 \text{aum} = 1{,}66 \times 10^{-24} \text{ g. } 1 \text{ eV} = 10^{-6} \text{ MeV} = 1{,}602 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

واضح أيضاً من هذا المثال أنه ليس لقانون مصونية الكتلة أي معنى؛ لأن كتلة Δm تختفي تماماً وتتحول إلى طاقة.

د- انقسام الجسيمات الأساسية: لقد لوحظ أن كثيراً من الجسيمات الأساسية غير مستقر بالنسبة لانقسامه الى جسيمات أخرى أبسط منه. ولن ندرس هذه الظاهرة باسهاب لأنها من اختصاص الفيزياء النووية. وسنكتفي بايراد بعض الأمثلة التي تبين أهمية تطبيق قوانين حفظ الطاقة وكمية الحركة عند دراسة انقسام ما، وسنقتصر على انقسام الميزونات Π و μ. فمن المعلوم

أن الميزونات $\overline{\Pi}$ توجد على ثلاثة أنواع Π^{+} و Π^{-} و Π^{0} (مشحونة ايجابياً وسلبياً ومعتدلة) وأن كتلة الميزون المشحون تساوي 273 مرة كتلة الالكترون ولكنه لايلبث أن ينقسم بعد وقت قصير جداً من ولادته، وقد أثبتت التجارب أن عمره يساوي $2{,}6\times10^{-8}$ sec. ولكن كتلة الميزون المعتدل تساوي 264 مرة من كتلة الالكترون أما الميزونات البطيئة $\mu^{\pm}$ فكتلتها تساوي 207 مرات ولكن عمرها أطول فهو يساوي 2×10^{-6} sec.

لنبدأ بدراسة انقسام الميزون $\Pi^{\pm}$ الى الميزون $\mu^{\pm}$ والنيترينو طبقاً للمعادلة:

$$\Pi^{\pm} \longrightarrow \mu^{\pm} + \nu \qquad (9.56)$$

حيث النيترينو υ هو جسيم كتلته، على مايبدو، قريبة جداً من الصفر كالفوتون غير أنه لايؤين في طريقة أي ذرات، ويمكن، بدراسة الانقسام السابق حساب كتلة النيترينو اذا علمت كتل الميزونات المشاركة في التفاعل فاذا اعتبرنا أن المجموع الكلي لكمية الحركة في مجموعة مركز الكتلة الاحداثية يساوي الصفر أي أن $P=|P_{\nu}|=|P_{\mu}|$ ثم كتبنا قانون مصونية الطاقة في هذا التفاعل فإننا نجد:

$$\begin{aligned} m_{\Pi}C^{2} &= E^{\mu}+E^{\nu}=E^{\mu}_{kin}+m_{\mu}c^{2}+\sqrt{P_{\nu}^{2}c^{2}+m_{\nu}^{2}c^{2}} = \\ &= E^{\mu}_{kin}+m_{\mu}c^{2}+\sqrt{P_{\mu}^{2}c^{2}+m_{\nu}^{2}c^{4}} \end{aligned} \qquad (9.57)$$

وبالاستفادة من العلاقة التي تعبر عن امكانية كتابة الطاقة بشكلين:

$$E^{\mu}_{kin}+mc^{2}=\sqrt{P^{2}c^{2}+m^{2}c^{4}}$$

حيث نجد منها بالتربيع:

$$E^{2}_{kin}+2mc^{2}E_{kin}=P^{2}c^{2}$$

ثم بتبديل $P^{2}c^{2}$ بقيمتها في (9.57) نحصل على المعادلة:

$$m_{\Pi}c^{2}=E^{\mu}_{kin}+m_{\mu}c^{2}+\sqrt{(E^{\mu}_{kin})^{2}+2m_{\mu}c^{2}E^{\mu}_{kin}+m_{\nu}^{2}c^{4}}$$

وهي معادلة جبرية بالنسبة الى E^{μ}_{kin} لحلها نربع الطرفين فنجد:

$$(m_{\Pi}c^2 - m_{\mu}c^2)^2 + (E_{kin}^{\mu})^2 - 2E_{kin}^{\mu}(m_{\Pi}c^2 - m\ \ c^2) =$$
$$= (E_{kin}^{\mu})^2 + 2m_{\mu}c^2E_{kin}^{\mu} + m_{\nu}^2c^4$$

ومنه نجد أخيراً قيمة E_{kin}^{μ} التالية:

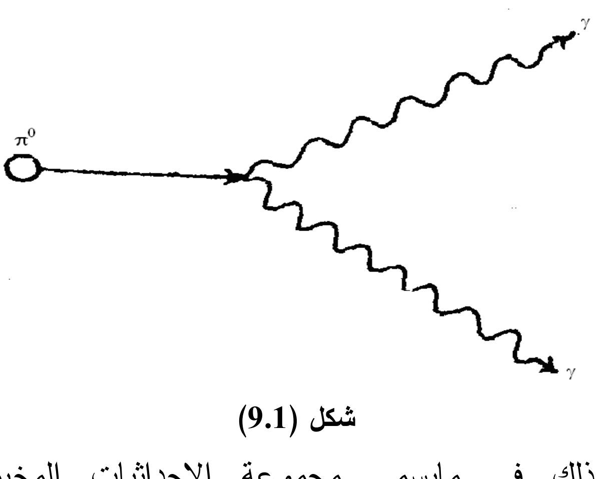
$$E_{kin}^{\mu} = \frac{(m_{\Pi}c^2 - m_{\mu}c^2)^2 - m_{\nu}^2c^4}{2m_{\Pi}c^2} = \frac{[(m_{\Pi} - m_{\mu})^2 - m_{\nu}^2]c^2}{2m_{\Pi}} \quad (9.58)$$

وبقياس هذه الطاقة E_{kin}^{μ} يمكن حساب m_{ν} وقد وجد نتيجة لذلك أن E_{kin}^{ν} تساوي دوماً قيمة معينة ثابتة وأن $m_{\nu} = 0$ مما يؤكد صحة الدراسة الحركية السابقة للانقسام المذكور.

لندرس أخيراً انقسام الميزون Π^0 المعتدل الى جسيمي طاقة (فوتونين) شكل (9.1) طبقاً للمعادلة:

$$\Pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma \qquad (9.59)$$

حيث يمكن التأكد من وجود كل من الفوتونين بواسطة ما يؤينانه في طريقهما من ذرات، وقد لوحظت علاقة ما بين طاقة الفوتونين الناتجين والزاوية التي ينطلقان بها. ويمكن ايجاد هذه العلاقة نظرياً انطلاقاً من قوانين مصونية الطاقة.



شكل (9.1)

وسندرس ذلك في مايسمى مجموعة الاحداثيات المخبرية (وهي المجموعة التي تتحرك بالنسبة الى مجموعة مركز الكتلة c بسرعة معينة v(c)،

وتتم كل القياسات فيها، لذا نستفيد من ثبات مربع شعاع كمية الحركة في الفراغ الرباعي المعبر عنه بالمعادلة:

$$I = -m_{\Pi}^{2}c^{4} = (\vec{P_1} + \vec{P_2})^{2}c^{2} - (E_1 + E_2)^{2} \qquad (9.60)$$

حيث P_1, P_2, E_1, E_2 هي كميتا حركتي الفوتونين وطاقتاهما على الترتيب. وبما أن كتلة الفوتون تساوي الصفر فإن طاقته تساوي pc، وعندئذٍ نجد بالتبديل في (9.60) المعادلة:

$$m_{\Pi}^{2}c^{4} = (p_1 + p_2)^{2}c^{2} - (\vec{p_1} + \vec{p_2})^{2}c^{2} = \\ = 2p_1p_2c^{2}(1 - \cos\varphi) = 4p_1p_2c^{2}\sin^{2}\frac{\varphi}{2} \qquad (9.61)$$

حيث φ الزاوية بين اتجاهي الفوتونين المنطلقين. ومنه نجد القيمة التالية للزاوية:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{mc^{2}}{2\sqrt{E_1E_2}} \qquad (9.62)$$

وهي تتوافق توافقاً جيداً مع التجربة، مما يؤكد مرة أخرى صحة النظرية النسبية.

76- **اصطدام الجسيمات في النظرية النسبية**:

سنهتم في هذه الفقرة بالاصطدامات المرنة بين الجسيمات وهو الاصطدام الذي لايحدث أي تفاعل ولايغير البنية الداخلية لأي من الجسيمات المصطدمة وهذا ما يحدث كثيراً في عالم الجسيمات الأساسية.

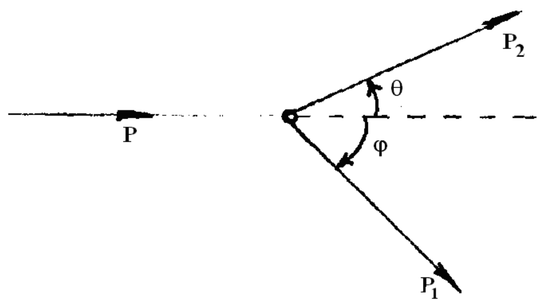
ليكن الجسيم السريع ذي الكتلة μ وكمية الحركة $\vec{p}$ ولندرس اصطدامه بجسيم آخر كتلته m، يمكن اعتباره ساكناً اذا كانت سرعة الجسيم الصادم أكبر بكثير من سرعته. أما بعد الاصطدام فإنه سينطلق بكمية حركة p_1 تصنع زاوية ما φ. وينطلق الجسيم السريع بكمية حركة $\vec{p_2}$ تصنع زاوية θ مع $\vec{p}$ (شكل

9.2)، ولنحسب طاقة الجسيم الذي انطلق بكمية حركة $\vec{p}_1$ بعد الاصطدام (وهو الذي كان ساكناً في البدء).

لذا نكتب قانوني مصونية الطاقة وكمية الحركة التاليين:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \qquad (9.63)$$

$$mc^2 + E = E_1 + E_2 \qquad (9.64)$$



الشكل (9.2)

وهما المعادلتان الأساسيتان اللازمتان لحساب E_1 و E_2 لحلهما نضع (9.64) بالشكل:

$$\sqrt{p^2c^2 + \mu^2c^4} = \sqrt{p_2^2c^2 + \mu^2c^4} + E_{kin}^{(1)} \qquad (9.65)$$

ثم نربع (9.63) بعد نقل p_1 الى الطرف الأيسر فنجد:

$$p_2^2 = p_1^2 + p^2 - 2p_1 p \cos\varphi \qquad (9.66)$$

وبحذف p_2 من (9.65) و (9.66) ثم التعبير عن p_1 بقيمتها من العلاقة:

$$p_1^2c^2 = (E_{kin}^{(1)})^2 + 2mc^2E_{kin}^{(1)} \qquad (9.67)$$

نجد أخيراً:

$$pp_1c^2 \cos\varphi = E_{kin}^{(1)} (\sqrt{p^2c^2 + \mu^2c^4} + mc^2 \qquad (9.68)$$

وبتربيع العلاقة السابقة تم التعبير عن p_1 بقيمتها أيضاً من (9.67) نحصل على الطاقة الحركية للجسيم الذي كان ساكناً قبل الاصطدام، وهي التالية:

$$E_{kin}^{(1)} = \frac{2mp^2c^4\cos^2\varphi}{(\sqrt{p^2c^2+\mu^2c^4}+(mc^2))^2-p^2c^2\cos^2\varphi} \qquad (9.69)$$

وهي تبين أن أكبر طاقة يكتسبها هذا الجسيم تنتج عندما $\varphi = 0$ أي أن:

$$(E_{kin}^{(1)})_{max} = 2mc^2\frac{p^2c^2}{(\sqrt{p^2c^2+\mu^2c^4}+(mc^2))^2-p^2c^2} \qquad (9.70)$$

لندرس بعض الحالات الخاصة.

1- اذا كان الجسيم الوارد بروتوناً أو نتروناً والجسيم الساكن الكتروناً فيمكن أن نضع $m << \mu$. وكذلك سنعتبر أن الجسيم الوارد سريع جداً بحيث تتحقق العلاقة $pc >> \mu c^2$ وعندئذٍ نحصل من (9.70) على الطاقة التالية:

$$(E_{kin}^{(1)})_{max} = 2mc^2\frac{p^2c^2}{2mc^2pc+\mu^2c^4} \qquad (9.71)$$

فإذا تحققت، بالاضافة إلى ماسبق، العلاقة التالية:

$$pc >> \frac{\mu^2c^4}{mc^2} = \frac{\mu}{m}\mu c^2$$

فإن الطاقة $E_{kin}^{(1)}$ المعبر عنها بالعلاقة (9.71) توضع بالشكل النهائي التالي:

$$(E_{kin}^{(1)})_{max} \approx pc \approx E \qquad (9.72)$$

وهي تساوي طاقة الجسيم الوارد.

ب- اذا كان الجسيم الوارد خفيفاً جداً (الكترون مثلاً) والجسيم الساكن ثقيل جداً أي $\mu << m$ وتحقق أيضاً، كما ذكرنا سابقاً $pc >> \mu c^2$ فيمكن من (9.70) الحصول على القيمة العظمى لطاقة الجسيم الذي كان ساكناً قبل الاصطدام على القيمة العظمى لطاقة الجسيم الذي كان ساكناً قبل الاصطدام وهي التالية:

$$(E_{kin}^{(1)})_{max} = 2mc^2 \frac{p^2c^2}{2mc^2pc + m^2c^4} \qquad (9.73)$$

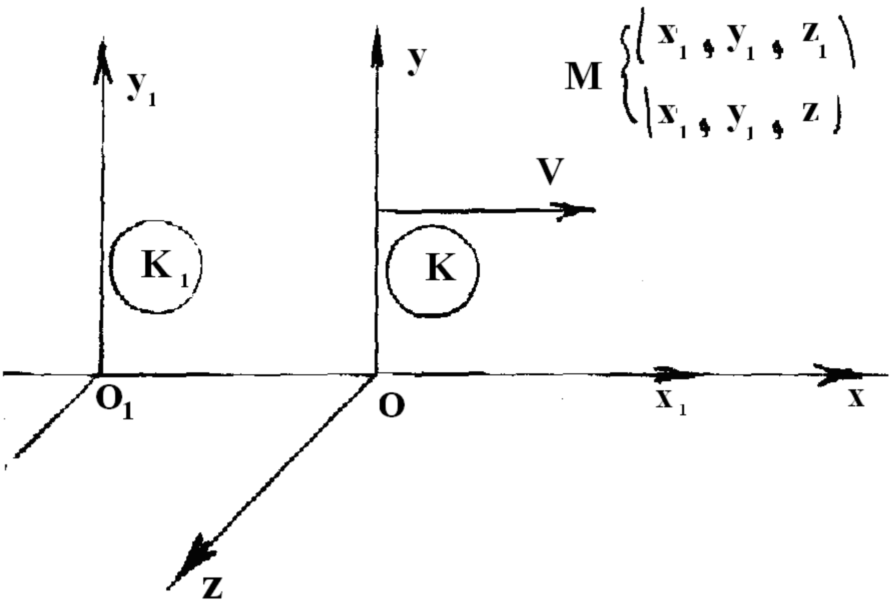
واذا تحقق بالاضافة الى ذلك، أن $pc << mc^2$ فإننا نجد عندئذٍ من (9.73) الطاقة التالية:

$$E_{kin}^{(1)} = pc = E \qquad (9.74)$$

أي أن الطاقة العظمى للجسيم، الذي كان ساكناً، تصبح مساوية لطاقة الجسيم الوارد فهو يأخذ كل الطاقة.

77- **ظاهرة كومبتون**: Compton Effect

ان أحد التطبيقات الهامة لدراسة الاصطدام في الميكانيك النسبي هو مايسمى ظاهرة كومبتون وهي تحدث عندما يكون الجسيم الوارد فوتوناً طاقته $E = pc$ والجسيم الساكن الكتروناً طاقته $E_1 = E_{kin}^{(1)} + mc^2$ ويكون للفوتون الناتج طاقة $E_2 = p_2c$ شكل (9.3).



الشكل (9.3)

لندرس هذه الظاهرة بالتفصيل، لذا نكتب معادلتي مصونية الطاقة وكمية الحركة التاليتين:

$$E = E_2 + E_{kin}^{(1)} \qquad (9.75)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \qquad (9.76)$$

فمن الثانية نجد:

$$p_1^2 = p^2 + p_2^2 - 2pp_2 \cos\theta \qquad (9.77,a)$$

حيث θ هي الزاوية بين اتجاه الفوتون الوارد والفوتون المتشتت ذي الطاقة E_2. فإذا علمنا أن $p = \frac{E}{c}, p_2 = \frac{E_2}{c}$ فيمكن وضع العلاقة السابقة بالشكل:

$$p_1^2 = (\frac{E}{c})^2 + (\frac{E_2}{c})^2 - \frac{2EE_2 \cos\theta}{c^2} \qquad (9.77b)$$

وبالاستفادة من (9.67) نحول (9.77b) الى الشكل:

$$(E_{kin}^{(1)})^2 = 2m_e c^2 E_{kin}^{(1)} = E^2 + E_2^2 - 2EE_2 \cos\theta \qquad (9.78)$$

ويمكن الآن الحصول على طاقة الفوتون المتشتت E_2 بحذف $E_{kin}^{(1)}$ من المعادلتين (9.75) و (9.78) حيث يعبر عن هذه الطاقة بدلالة طاقة الفوتون الوارد E وزاوية التشتت θ بالعلاقة:

$$E_2 = \frac{m_e c^2 E}{m_e c^2 + E(1 - \cos\theta)} \qquad (9.79)$$

لنحسب التغير في طول موجة الفوتون الوارد، الناتج عن الاصطدام لذا نلاحظ أن:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E}$$

ويكون:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = hc(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1}) = \frac{hc}{m_e c}(1 - \cos\theta) = \Lambda(1 - \cos\theta) \qquad (9.80)$$

حيث رمزنا بـــ Λ للمقدار:

$$\Lambda = \frac{h}{m_e c} = 0{,}0242\ A^\circ$$

وهو مايسمى طول موجة كومبتون.

ومن الطريف أن نلاحظ أن التغير في الطول الموجي غير تابع لطاقة الفوتون الوارد وأن $\Delta\lambda_{max} = 2\Lambda$.

ولحساب طاقة الالكترون الحركية الناتجة بعد الاصطدام نستخدم العلاقتين (9.75) و (9.79) فنجد:

$$E_{kin}^{(1)} = E - E_2 = \frac{E(1-\cos\theta)}{m_c c^2 (1-\cos\theta)} E \qquad (9.81)$$

فإذا بدلنا E في البسط والمقام بقيمتها $\frac{hc}{\lambda}$ ثم قسمنا حدي الكسر على $m_e c^2$ فإننا نحصل على الطاقة الحركية التالية:

$$E_{kin}^{(1)} = \frac{\Lambda(1-\cos\theta)}{\lambda + \Lambda(1-\cos\theta)} E \qquad (9.82)$$

وهي صغيرة جداً عندما $\Lambda << \lambda$ أما عندما $\Lambda \sim \lambda$ فإن هذه الطاقة تصبح من رتبة طاقة الفوتون الوارد.

تفيد العلاقة السابقة (9.82) في دراسة تشتت الضوء على مختلف المواد، فإذا طبقت على الضوء المرئي الذي طول موجته λ كبير جداً بالنسبة الى A (أي $(7000 > \lambda > 4000 >> \Lambda = 0{,}042\ A^\circ)$) نجد أن الطاقة التي تكتسبها الكترونات المادة صغيرة جداً طبقاً لــ (9.82) وسينطلق الفوتون بالطاقة نفسها تقريباً مما لايسبب أي تغير في نوع الضوء الوارد، ويمكن في هذه الحالة استنتاج علاقة رياضية لدراسة تشتت الضوء انطلاقاً من مفاهيم كلاسيكية.

أما إذا طبقت العلاقة (9.82) على الفوتونات ذات الأطوال الموجية الصغيرة كأشعة رونتجن وأشعة γ فإن التغير في الطول الموجي يصبح من رتبة طول الموجة الواردة كما أن الطاقة التي يكتسبها الالكترون تصبح كبيرة مما يسبب تغيراً في الأشعة الواردة ولاتستطيع العلاقات الكلاسيكية وصف تشتت هذه الأشعة على البلورات المعدنية ولابد لذلك من تطبيق نظرية الكم.

وهكذا نرى أن النظرية النسبية تبين لنا حدود تطبيق المعادلات الكلاسيكية لدراسة بعض الظواهر الفيزيائية.

78- **مفاهيم أولية عن النظرية النسبية العامة**:

لقد حاولت النظرية النسبية التي درسناها في الفصلين السابقين أن توحد فيزياء الجمل العطالية، فعملت على صياغة كافة القوانين الفيزيائية في قالب واحد (الفرضية الأولى)، ولكن ماذا عن الجمل غير العطالية؟ (وهي تلك الجمل الاحداثية التي تتحرك بالنسبة لبعضها بحركة غير منتظمة) وهل لهذه الجمل ذاتية خاصة بحيث نحتاج الى فيزياء مستقلة لدراسة الظواهر الفيزيائية التي تجرى ضمن كل منها؟ لقد فكر أنيشتاين طويلاً بهذه الجمل في الفترة التي تلت ظهور النظرية النسبية العامة التي لن نستطيع دراستها هنا بالتفصيل لأن هذا يحتاج إلى كثير من الرياضيات العالية وسنكتفي باعطاء لمحة سريعة عنها.

ليست النسبية العامة، كما يدل اسمها، الا تعميماً مباشراً للنظرية الخاصة التي ظهرت سنة 1905 والتي تهتم بالجمل العطالية بينما تهتم العامة بالجمل اللاعطالية، ولها فرضيتان اثنتان:

الفرضية الأولى: يجب صياغة كافة القوانين الفيزيائية بشكل واحد في كافة الجمل المتحركة وبالتالي فإن صيغة أي قانون فيزيائي يصف ظاهرة فيزيائية ما، يجب أن تكون مستقلة عن الجملة الاحداثية التي تحدث فيها هذه الظاهرة.

الفرضية الثانية: لايمكن لمراقب موجود في مختبر مغلق أن يميز بين الظواهر المتعلقة بحقل جاذبية وتلك المتعلقة بتسارع المختبر، وهذه الفرضية تجسيد لما يسمى مبدأ التعادل بين الكتلة الثقيلة والكتلة العاطلة الذي يبرهن نظرياً كما يلي:

تتعين الكتلة العاطلة m_i لجسيم ما بقياس التسارع الذي يكتسبه هذا الجسم عندما نطبق عليه قوة معينة F طبقاً للقانون التالي:

$$\vec{F} = m_i \vec{W} \qquad (9.83)$$

وتتعين الكتلة الثقيلة m_g للجسيم بعد معرفة قوة الجذب التي يتأثر بها عند وضعه بالقرب من جسم آخر كتلته M حسب قانون الجاذبية العالمية الذي رأيناها سابقاً وهو:

$$F_g = f\frac{Mm_g}{r^2} \qquad (9.84)$$

فاذا اعتبرنا جسيماً يسقط سقوطاً حراً بجوار الأرض المباشر وطبقنا القانون السابق عليه فإنه يجب تبديل M بكتلة الأرض و r بنصف قطرها وسيكتسب هذا الجسم تسارعاً g يحسب من العلاقة (9.83) كمايلي:

$$g = \frac{F}{m_i} = f\frac{M_{earth}}{r_{earth}^2} - \frac{m_g}{m_i} \qquad (9.85)$$

وبما أن التسارع الأرضي g ثابت على خط عرض معين، كما تدل التجارب، فإن المقدار $\frac{m_g}{m_i}$ يجب أن يساوي مقداراً ثابتاً، وبالفعل فقد أثبتت التجارب الحديثة أن النسبة السابقة تساوي الواحد بخطأ نسبي لايتجاوز 10^{-10}.

لقد رأينا في الفقرات السابقة أن المادة والطاقة وجهان مختلفان لشيء واحد فليست الكتلة سوى عامل يشير إلى مقدار الطاقة وليست المادة سوى تركيز للطاقة ويتم الربط بينهما بالعلاقة الشهيرة $E = mc^2$. وينتج عن ذلك أن كل طاقة E تعادل كتلة مقدارها $\frac{E}{c^2}$ يمكن أن يكون لها خواص تجاذبية. فإذا طبقنا ذلك على الفوتونات (جسيمات الطاقة) التي طاقة كل منها تساوي $h\omega$ نجد أن لكل منها كتلة تعادل $\frac{h\omega}{2}$ وبالتالي يمكن القول أن كتلة الفوتون تزداد بازدياد تواتره، فكتلة الفوتون البنفسجي أكبر بمرتين تقريباً من كتلة الفوتون الأحمر، وكما تتجاذب الكتل المادية طبقاً لــ (9.84) فلابد أن تعاني الفوتونات الضوئية نوعاً من الجذب عند مرورها بالقرب من أجسام مادية كالشمس مثلاً، ولما كان من المتعذر التحقق من ذلك تجريبياً بسبب سطوع الشمس وعدم امكانية النظر اليها في الحالة العادية، فقد انتظر العلماء كسوفاً كلياً لها حدث

عام 1919 وتحققوا تجريبياً من وجود انحراف يقارب "1,75 للأشعة الضوئية المنبثقة من النجوم عند مرورها بالقرب من الشمس.

ان الانحراف السابق يجعلنا نعيد النظر في بنية الفراغ الثلاثي والرباعي حيث كنا نعتبر أن الخط المستقيم هو مسار الشعاع الضوئي. ولما كان المسار لايمكن أن يكون مستقيماً الا في الفضاء البعيد عن أي مادة، بحيث ينعدم أي حقل للجاذبية، فإنه يستحيل القول بوجود المسار المستقيم للشعاع الضوئي عند مروره بالقرب من أجسام مادية ولابد أن ينحني هذا المسار. وهكذا يصبح الفراغ لااقليدياً ولم يعد الخط المستقيم والدائرة أساساً لهندسته كما كان في الفراغ الاقليدي، حيث استطعنا تمثيل الحركة المستقيمة بمنحني بياني مستو مرسوم. بالنسبة لمحورين متعامدين ox و ot. وأصبح لزاماً علينا، طبقاً للنظرية النسبية العامة أن ندرس هذه الحركة لا بواسطة محورين متعامدين وانما بواسطة خطين جيوديزيين متعامديين مرسومين على سطح فراغي. وقد بحث أينشتاين في البنية الهندسية لهذا الفراغ ووجد ضالته فيما يسمى هندسة ريمان التي تعتبر أن الفراغ محدب بحيث يكون مجموع زوايا المثلث فيه أكثر من 180°. ولن نخوض في التفاصيل لأن ذلك من اختصاص الرياضيين والباحثين في النظرية النسبية. ونكتفي بالقول أن الجمل الاحداثية المتعلقة بهذا الفراغ، والتي تقيس فيها المكان والزمان، هي مايسمى جمل غوص حيث تأخذ القوانين الفيزيائية شكلاً موحداً في كافة هذه الجمل ولكنها تحوي على أمثال ثابتة يحددها الشكل الهندسي للفراغ اللااقليدي الذي تحدد خواصه المجالات الجاذبية التي يوجد ضمنها ويتأثر بها.

79- **نتائج وتحقيقات تجريبية**:

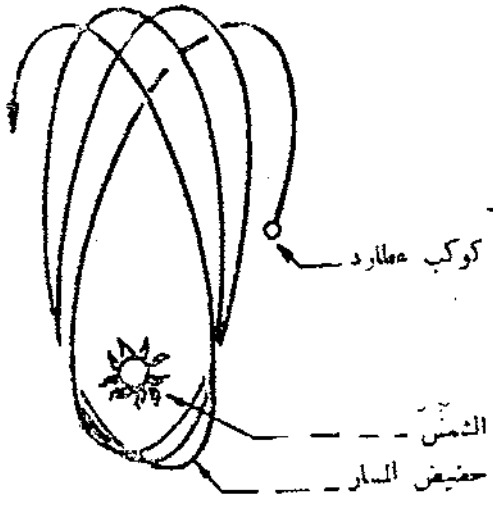
آ- حركة كوكب عطارد: درسنا في الميكانيك الفيزيائي الحركة في حقل مركزي استناداً الى مكانيك نيوتن وبرهنا أن مسارات الكواكب السيارة حول الشمس هي قطوع ناقصة تقع الشمس في أحد محرقيها. وقد لوحظ فيما بعد أن المسارات السابقة تتأرجح قليلاً ولاتبقى في مستو ثابت، وهذا ما يخالف طبقاً

لنظرية العزم الحركي للحركة المركزية والتي تؤكد أن المسار يجب أن يكون واقعاً في مستو متعامد مع $\vec{L_0}$. وكانت ظاهرة التأرجح هذه واضحة جداً بالنسبة لكوكب عطارد، أقرب الكواكب الى الشمس، والذي يدور 414 دورة حول الشمس خلال 100 عام أرضي وقد بلغ زاوية تأرجح المسار خلال هذه الفترة "574 (شكل 9.4). وقد حاول العلماء عندئذٍ تفسير هذه الظاهرة ففرضوا وجود تفاعل بين كوكب عطارد وكواكب المجموعة الشمسية الأخرى بالاضافة الى قوة جذب الشمس له وأجروا حسابات دقيقة طبقاً لهذه الفرضية فوجدوا أن الانحراف المذكور يجب أن يساوي "531 أي بفرق قدره "43.

ولما وضع انيشتين النظرية النسبية العامة درس حركة جسيم في حقل جاذبية الشمس واستنتج رياضياً قانونين جديدين بدلاً من قانوني ثبات السرعة السطحية وقانون بينه الثاني هما:

$$\frac{d^2\mu}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2} + 3\mu u^2, \quad u^2 \frac{d\varphi}{dS} = c \qquad (9.86)$$

حيث c ثابت السطوح و $u = \frac{1}{\rho}$ و μ ثابت غوص و φ الزاوية السمتية أما dS فهو عنصر المجال الذي عرف سابقاً، وقد طبق انيشتين المعادلتين السابقتين لدراسة كوكب عطارد فوجد أن الانحراف المنوه عنه سابقاً يجب أن يساوي "573 خلال قرن واحد أي باختلاف ثانية واحدة فقط عن التجربة. وقد كان هذا دعماً كبيراً لنظريته الشهيرة.



الشكل (9.4)

ب- تأثير الجاذبية على سير الزمن:

لقد تنبأت النظرية النسبية العامة بتقديم أو تأخير السرعات عندما تنتقل من مجال جذب إلى آخر شدته أصغر أو أكبر من الحقل الذي كانت فيه على الترتيب. فإذا كانت t_0 الفترة الزمنية بين دقات ساعة ما عندما لاتكون متأثرة بأي حقل جاذب فإن هذه الفترة تصبح t عندما توضع في حقل جذب ناتج عن كتلة m نصف قطرها R بحيث يكون:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - 2f\frac{M}{R}}} \qquad (9.87)$$

حيث f ثابت الجذب للكتلة M. وينتج عن التغير في الزمن تغيراً في تواتر الاشعاعات $(\nu = \frac{1}{T})$ الواردة من نجم ما، كالشمس مثلاً، الى كوكب مثل الأرض، مما يسبب انزياحاً في الخطوط الطيفية نحو الأحمر ويبرهن ذلك نظرياً كمايلي:

ليكن الفوتون ذو الطاقة $h\nu$ الصادر عن نجم كتلته M ونصف قطره R.

ان كتلة هذا الفوتون المعادلة لطاقته هي $m = \frac{h\nu}{2}$، أما طاقته الكامنة الناتجة عن وجوده في حقل جذب النجم السابق فهي، طبقاً لما رأيناه سابقاً.

$$V = -\int \vec{F}.\vec{dr} = -\frac{fMm}{h} = \frac{fMh\nu}{c^2R} \quad (9.88)$$

وتكون الطاقة الكلية للفوتون عند انبعاثه من النجم:

$$E = h\nu - \frac{fMh\nu}{c^2R} = h\nu(1-\frac{fM}{c^2R}) \quad (9.89)$$

أما طاقة هذا الفوتون الكلية عند وصوله إلى كوكب الأرض بتواتر ν' فهي $h\nu'$ (باهمال طاقته الكامنة على الأرض بالنسبة لهذه الطاقة على النجم) واذا استفدنا من قانون مصونية الطاقة فإننا نجد:

$$h\nu' = h\nu(1-\frac{f'M}{c^2R})$$

ومنه:

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1 - \frac{fM}{c^2R} \quad (9.90)$$

أما التغير النسبي في التواتر أي $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ فيساوي:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu-\nu'}{\nu} = 1-\frac{\nu'}{\nu} = \frac{fM}{c^2R} \quad (9.91)$$

وبما أن $\Delta\nu > 0$ فإن التواتر يزداد وبالتالي تتناقص طول الموجة وينزاح الخط الطيفي نحو الأحمر، ويمكن التحقق من ذلك تجريبياً بمقارنة الضوء الآتي من النجوم بذلك التي نحصل عليه في المختبر. وإذا أخذنا نجم الشمس مثلاً وحسبنا $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ فإننا نجد:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{fM}{c^2R} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times1{,}99\times10^{30}}{(3.10^8)^2\times6.4\times10^8} = 2{,}12\times10^{-6} \quad (9.92)$$

وقد حسبت $\Delta\lambda$ المقابلة للضوء الأخضر $(\lambda = 5000\,A^\circ)$ فوجد أن $\Delta\lambda = 0{,}01\,A^\circ$ وهي قيمة صغيرة جداً لايمكن ملاحظتها بسبب عرض الخط

الطيفي الناتج عن ظاهرة دوبلر. ولكن اذا أجرينا الحساب السابق باستبدال الشمس بنجم آخر من تلك النجوم التي كثافتها كبيرة جداً بحيث تبلغ النسبة $\frac{M}{R}$حداً كبيراً (مثل النجم المسمى "رفيق الشعري اليمانية" (Sompanion of Syius) والذي تصل كثافته الى $1,5\times10^{8}\ kg/m^{3}$، أي كتلة السنتمتر المكعب الواحد منه تساوي 150 kg) فيمكن ملاحظة الانزياح السابق تجريبياً.

وقد استطاع العلماء فيما بعد تحقيق الانزياح الطيفي السابق في المختبر، عندما أجروا تجربة لقياس تواترات اشعاعات γ "الساقطة" من ارتفاع 20 m، اذ من المعلوم أن طاقة الجسيم الساقط من ارتفاع ℓ تتغير بمقدار $mg\ell$، فإذا طبقنا قانون مصونية الطاقة على الفوتونات المذكورة فإننا نجد بسهولة:

$$h\nu' = h\nu + mg\ell + \frac{h\nu}{c^2}g\ell = h\nu(1+\frac{g\ell}{c^2}) \qquad (9.93)$$

حيث υ تواتر الفوتون على ارتفاع ℓ و ν' تواتره النهائي فإذا كان $\ell = 20\,m$ فإننا نحصل على التغير النسبي التالي في التواتر:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{g\ell}{c^2} = \frac{9,8\times20}{(3\times10^{8})^2} = 2,2\times10^{-15}$$

وقد أثبتت التجربة صحة العلاقة السابقة بما لايدع مجالاً للشك في تأثير الجاذبية على الزمن.

مسائل الفصل التاسع

1- مسرع للبروتونات يستطيع اكسابها طاقة كافية لتشكيل أزواج من البروتونات وضديداتها proton-antiproton pairs طبقاً للتفاعل:

$$\vec{p} + \vec{p} \longrightarrow p + p + (p + \vec{p})$$

احسب أصغر طاقة لازمة للبروتونات الواردة لكي يتم التفاعل؟

<u>الحل:</u> من المعلوم في الفيزياء النووية أنه عندما تكون طاقة البروتون الوارد صغرى بحيث يتم التفاعل فإن الجسيمات الأربعة الناتجة عن التفاعل ستنطلق بسرعة تكاد تكون معدومة، وبالتالي بطاقة تساوي $4mc^2$ حيث m كتلة السكون للبروتون، فإذا استخدمنا مجموعة احداثيات مركز الكتلة حيث يقترب البروتونان من بعضهما بسرعة v_{cM} لكل منهما باتجاهين متعاكسين أي أن كلاً منهما يقترب من الآخر قبل التفاعل بسرعة v_{cM} ويكون طاقة كل منهما $\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ وهكذا نجد بتطبيق قانون مصونية الطاقة:

$$\frac{2mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_{cM}^2}{c^2}}} = 4mc^2$$

ومنه نحسب v_{cM} حيث نجد:

$$v_{cM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

وللحصول على هذه السرعة ثم حساب الطاقة المطلوبة في المجموعة المخبرية نستفيد من علاقة تركيب السرع المعروفة (8.30) حيث نجد من الأولى باعتبار أن u'_x هي سرعة الجسيم في مجموعة مركز الكتلة وتساوي

و V هي سرعة مركز الكتلة نفسه بالنسبة للمجموعة المخبرية أي تساوي v_{cM} وهكذا نجد:

$$v = \frac{v_{cM} + v_{cM}}{1 + \frac{c_{cM}^2}{c^2}} = \frac{4\sqrt{3}}{7} C$$

وعندئذٍ نحسب الطاقة الحركية طبقاً للعلاقة (9.31) حيث نجد:

$$E_{kin} = [m(v) - M]c^2 = \left[\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{48}{49}}} - m \right] = 6\,mc^2$$

2- أوجد قانون الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام (في جملتها الخاصة) في النظرية النسبية وبرهن أن هذا القانون يؤول إلى ما يقابله في الميكانيك التقليدي عندما $v << c$.

3- من المعلوم أنه يمكن لاشعاعات γ في شروط مناسبة أن تشكل أزواجاً من اليوزيترونات والالكترونات (e^+, e^-) برهن أن ذلك لايمكن أن يتم الا بوجود جسيم ثالث يأخذ كمية من الطاقة بحيث يتحقق قانون مصونية الطاقة في الفراغ الرباعي، ثم أوجد أصغر طاقة لازمة للفوتونات لكي يتم التفاعل السابق.

4- ينقسم جسيم كتلته m إلى ثلاث جسيمات كتلها m_3, m_2, m_1 أوجد أكبر طاقة يمكن أن يأخذها الجسيم الأول $E_{max}^{(1)}$ نتيجة لهذا الانقسام.

5- يتحرك جسيم كتلته الساكنة m على المحور ox حسب قانون الحركة التالي:

$$x = \sqrt{b^2 + c^2 t^2} - b$$

احسب القوة التي تسبب هذه الحركة.

6- يتحرك جسيم كتلته الساكنة m بسرعة $\frac{4c}{5}$ ويصطدم اصطداماً غير مرن بجسيم له نفس الكتلة.

آ- احسب سرعة الجسيم الناتج.

ب- احسب كتلته الساكنة.

7- يمكن أن تتشكل الميزونات Π^+ عند اصطدام بروتون سريع بآخر طبقاً للمعادلة:

$$p + p \longrightarrow D + \Pi^+$$

احسب أصغر طاقة للبروتونات لكي يتم التفاعل السابق.

8- احسب طاقة ارتباط نواة الليثيوم المؤلفة من ثلاثة بروتونات وأربعة نترونات اذا علمت أن كتلتها الساكنة تساوي $1{,}6445.10^{-25}\,kg$ وأن كتلة كل من البروتون والنترين هي على الترتيب:

$1{,}67495.10^{-27}\,kg$ و $1{,}67265.10^{-27}\,kg$

9- احسب التغير في سرعة جسيم شحنته e وكتلته m بعد أن يجتاز فرقاً في الكمون قدره V.

10- ينقسم جسيم كتلته m من السكون إلى جسيمين كتلتاهما m_1 و m_2. احسب طاقة كل من الجسيمين الناتجين ثم احسب اندفاع كل منهما.

11- يطلب التعبير عن سرعة جسيم بدلالة اندفاعه وكتلته الساكنة.

- ملحق -

المحاور الإحداثية المتحركة

ACCELERATED COORDINATE SYSTEMS

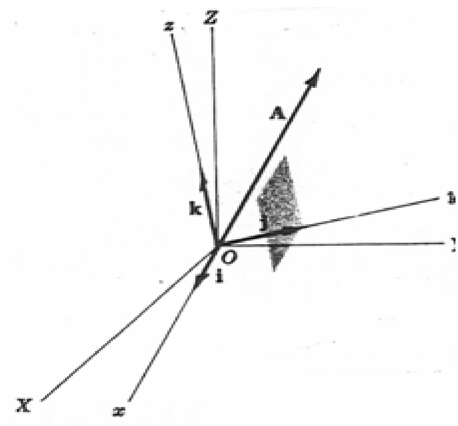
أنظمة المحاور غير القصورية (اللاعطالية):

:Non Inertial Axis Systems

هي أنظمة المحاور الإحداثية التي تتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة للفراغ. على سبيل المثال، مجوعة الإحداثيات المثبتة على الأرض ليست عطالية لأن الأرض تدور حول نفسها وحول الشمس. وبناء على ذلك إذا استخدمنا مجموعة محاور لوصف حركة جسم بالنسبة إلى الأرض فإننا سوف نحصل على نتائج غير دقيقة. لهذا السبب سنرى في هذا الفصل كيف تتم حركة الأجسام بالنسبة لمجموعة محاور متحركة.

أنظمة المحاور الدوارة Revolving Axis Systems:

بفرض XYZ مجموعة محاور ثابتة (عطالية) في الفضاء. وبفرض أن مجموعة المحاور xyz لها نفس نقطة الأصل o. ولكنها تدور بسرعة زاوية ω بالنسبة إلى المجموعة الثابتةXYZ. نعتبر أن جسم يتحرك في مجموعة المحاور xyz المتحركة.



الشكل (1): المحاور الإحداثية الدوارة

يطلب إيجاد سرعة وتسارع الجسم بالنسبة لكلٍ من مجموعة المحاور المتحركة xyz (اللاعطالية) والمثبتة XYZ (العطالية).

السرعة والتسارع بالنسبة إلى نظام إحداثيات متحرك

Velocity and Acceleration in Moving System Coordinates

إذا كان $\vec{r}$ متجه موضع الجسم المتحرك، فإنه يتعين في المجموعة xyz بالعلاقة التالية:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (1)$$

وتعطى سرعة الجسم بالنسبة إلى مشاهد يقف في المجموعة xyz بالمعادلة:

$$\vec{V} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_M = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \qquad (2)$$

يدل الرمز M على أن الاشتقاق يتم في المجموعة المتحركة.

تسمى السرعة في هذه المجموعة بالسرعة الظاهرية، ويتم الحصول على التسارع في هذه المجموعة باشتقاق السرعة في المعادلة (2) بالنسبة للزمن بالصورة:

$$\vec{a} = \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_M = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{i} + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{j} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \qquad (3)$$

يسمى هذا التسارع بالتسارع الظاهري.

السرعة والتسارع في نظام إحداثيات مثبت:

Velocity in Fixed System Coordinates:

أولاً السرعة في مجموعة محاور إحداثية مثبتة:

لإيجاد السرعة والتسارع لحركة جسم بالنسبة إلى مجموعة محاور إحداثية مثبتة XYZ يجب ملاحظة أنه ليس متجه الموضع $\vec{r}$ وحده هو المتغير بل تتغير متجهات الوحدة $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ نفسها لأنها محمولة على محاور x،y، z تدور (تتغير مع الزمن) بالنسبة إلى المجموعة المثبتة.

يمكن الحصول على متجه سرعة الجسم المتحرك بالنسبة إلى المجموعة المثبتة، من اشتقاق العلاقة (1)، بالنسبة للزمن وفق المعادلة:

$$\vec{V}\Big|_F = \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_F = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_M + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{V}\Big|_M + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} \qquad (4)$$

يدل الرمز F على أن الاشتقاق يتم بالنسبة للمجموعة المثبتة. والآن نحسب مشتقات متجهات الوحدة $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ بالنسبة للزمن ونعوض في المعادلة (4). بما أن $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ متجهات وحدة متعامدة فإن مشتق كل منها هو متجه واقع في مستوى المتجهين الآخرين. مثلا إن المشتق $\frac{d\vec{i}}{dt}$ هو متجه متعامد مع المتجه $\vec{i}$ وبالتالي يقع في مستوى المتجهين $\vec{k}, \vec{j}$ ولهذا يمكن أن يكتب بالصورة:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = a_1\vec{j} + a_2\vec{k} \qquad (5)$$

وبنفس الشكل يمكن كتابة المتجهين الآخرين، حيث نجد:

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = a_3\vec{k} + a_4\vec{i} \qquad (6)$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = a_5\vec{i} + a_6\vec{j} \qquad (7)$$

ترتبط المركبات $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_6$ ببعضها بعلاقات بسيطة يمكن إيجادها بسهولة.

نعلم أن: $\vec{i}.\vec{j} = 0$، باشتقاق هذه بالنسبة للزمن، ينتج أن:

$$\vec{i}\frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{j}\frac{d\vec{i}}{dt} = 0 \qquad (8)$$

بضرب العلاقة (5) سلمياً بـ j والعلاقة (6) بـ i ينتج أن:

$$\vec{i}\frac{d\vec{j}}{dt} = a_4$$

$$\vec{j}\frac{d\vec{i}}{dt} = a_1 \qquad (9)$$

ومن (8) و (9) ينتج أن : $a_4 = -a_1$ وبنفس الطريقة يمكن الحصول على أن: $a_5 = -a_2$ و $a_6 = -a_3$. وعندئذ تصبح العلاقات: (5) ، (6) ،(7) بالصورة:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = a_1\vec{j} + a_2\vec{k} \qquad (10)$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = a_3\vec{k} - a_1\vec{i} \qquad (11)$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -a_2\vec{i} - a_3\vec{j} \qquad (12)$$

ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل a_1،a_2،a_3، يمكن إيجادها مــن حــل المعــادلات الثلاث السابقة وذلك بضرب طرفي المعادلة (10) بــ x والمعادلة (11) بــ y والمعادلة (12) بــ z وجمع المعادلات الناتجة، يكون:

$$x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} = (-a_1y - a_2z)\vec{i} + (a_1x - a_3z)\vec{j} + (a_2x + a_3y)\vec{k} \qquad (13)$$

يمكن كتابة هذه المعادلة بالصورة:

$$\begin{aligned} x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} &= (-a_1y - a_2z)\vec{i} \\ &+ (a_1x - a_3z)\vec{j} + (a_2x + a_3y)\vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_3 & -a_2 & a_1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{\omega} X \vec{r} \end{aligned} \qquad (14)$$

يسمى المتجه $\vec{\omega}$ بمتجه السرعة الزاوية للمجموعة المتحركة بالنسبة للمجموعــة الثابتة.

حيث: $\vec{\omega} = \omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j} + \omega_3\vec{k}$

وباعتبار أن: $\omega_1 = a_3, \omega_2 = -a_2, \omega_3 = a_1$

بالتعويض من المعادلة(14) في المعادلة (4) نحصل أخيرا على متجه الســرعة للجسم المتحرك بالنسبة إلى المجموعة المثبتة بشكله النهائي بالصورة:

$$\vec{v}\Big|_F = \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_M + \vec{\omega}x\vec{r} \qquad (15)$$

يمثل المتجه $\vec{\omega}X\vec{r}$ السرعة اللحظية لنقطة ثابتة في المجموعة المتحركة وتنطبق

في اللحظة t على النقطة المتحركة P وتتحرك على محيط دائرة نصف قطرها r. ونسميها لذلك بسرعة موضع النقطة المتحركة في اللحظة t بالنسبة للمجموعة المثبتة،.يمكننا أن نستنتج أن سرعة الجسم بالنسبة لمجموعة محاور مثبتة تساوي سرعة الجسم بالنسبة لمجموعة محاور تدور بالنسبة للمجموعة المثبتة مضافا إليها الضرب ألاتجاهي لمتجه السرعة الزاوية لدوران المجموعة المتحركة $\vec{\omega}$في متجه الموضع $\vec{r}$ للجسم المتحرك. وتسمى السرعة في هذه المجموعة بالسرعة الحقيقية.

ثانيا ـ التسارع في نظام إحداثيات مثبت:

Acceleration in Fixed System Coordinates:

يمكن إيجاد التسارع في مجموعة محاور إحداثية مثبتة بنفس الطريقة التي وجدنا بها السرعة في الفقرة السابقة، حيث نجد:

$$\vec{a} = \left.\frac{d^2\vec{r}}{d^2t}\right|_F = \left.\frac{d}{dt}\right|_F \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d}{dt}\right|_F \left(\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_M + \vec{\omega}X\vec{r}\right) =$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_M \left(\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_M + \vec{\omega}X\vec{r}\right) + \vec{\omega}X\left(\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_M + \vec{\omega}X\vec{r}\right)$$

$$\left.\vec{a}\right|_F = \left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_M + 2\vec{\omega}X\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}}X\vec{r} + \vec{\omega}X(\vec{\omega}X\vec{r}) \qquad (16)$$

يسمى التسارع $\vec{a} = \left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_F$ بالتسارع الحقيقي وهو متجه موضع النقطة P بالنسبة للمجموعة المثبتة.

و يسمى التسارع $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}\Big|_M$ بالتسارع الظاهري للنقطة P وهو تسارعها في المجموعة المتحركة. ومجموع قيم حدود الطرف الأيمن للعلاقة (16) يشكل تسارع المجوعة المتحركة بالنسبة للمجموعة المثبتة. حيث:

$\dot{\vec{\omega}} X \vec{r}$ التسارع الخطي للنقطة الثابتة في المجموعة المتحركة (التسارع الخطي لموضع المتحرك)

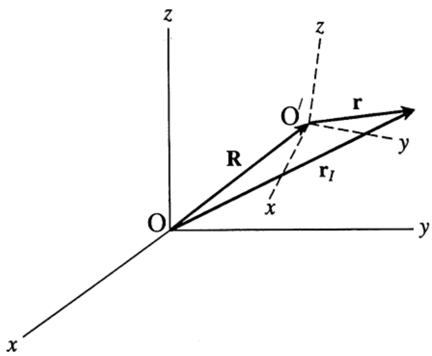
$\vec{\omega}X(\vec{\omega}X\vec{r})$ التسارع الجاذب للنقطة الثابتة في المجموعة المثبتة (التسارع الجاذب لموضع المتحرك)

$2\,\vec{\omega}\,X\,\dot{\vec{r}}$ التسارع المتمم (تسارع كوريو ليس) للنقطة مع المجموعة المثبتة والتي تنطبق في اللحظة t على النقطة المتحركة.

أنظمة المحاور المتحركة في الحالة العامة:

Axis Systems Moving in General:

افترضنا في الفقرة السابقة أن مجموعتي المحاور xyz و XYZ لهما نفس نقطة الأصل O. نفرض في حالة عدم وجود نقطة أصل مشتركة، أن $\vec{R}$ هو متجه موضع النقطة $O^/$ أصل المجوعة xyz، الشكل (2).



الشكل (2): المحاور المتحركة في الحالة العامة

إذا كانتا $\dot{\vec{R}}$ و $\ddot{\vec{R}}$ ترمزان إلى السرعة والتسارع اللتان تتحرك بهما نقطة الأصل $O^/$ بالنسبة إلى النقطة المثبتة O، تعطى عندئذٍ السرعة والتسارع بالنسبة إلى مجموعة المحاور المثبتة بالمعادلتين التاليتين:

السرعة:

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}_1}{dt}=\frac{d\vec{R}}{dt}+\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_M+\vec{\omega}X\vec{r} \qquad (17)$$

التسارع:

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\vec{\omega}x(\vec{\omega}x\vec{r})+2\vec{\omega}x\frac{d\vec{r}}{dt}+\dot{\vec{\omega}}x\vec{r}+\frac{d^2\vec{R}}{d^2t} \qquad (18)$$

يمكن الحصول على قانون نيوتن الثاني $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ في نظام إحداثيات لاعطالية من المعادلة الأخيرة بعد ضربها بكتلة الجسم المتحرك.

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m\left[\vec{\omega}x(\vec{\omega}x\vec{r}) + 2\vec{\omega}x\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}}x\vec{r} + \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right]$$

القوى الوهمية Fictitious Forces

يمكننا كتابة معادلة الحركة (18) في نظام إحداثيات متسارع بصورة مماثلة لصورة قانون نيوتن الثاني في نظام عطالي وذلك بالصورة التالية:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{eff} \qquad (19)$$

حيث $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Big|_M$ التسارع الملاحظ في نظام الإحداثيات المتحرك والناتج عن القوة الفعالة التالية:

$$\vec{F}_{eff} = \vec{F} - m\left[\vec{\omega}x(\vec{\omega}x\vec{r}) + 2\vec{\omega}x\vec{v} + \dot{\vec{\omega}}x\vec{r} + \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right] \qquad (20)$$

يتضمن الحد الثاني من الطرف الأيمن مجموعة قوى تسمى بـــالقوى الخياليـــة، وهي:

قوة الجذب المركزي centrifugal force:

$$\vec{F}_{cf} = -m\vec{\omega}x(\vec{\omega}x\vec{r}) \qquad (21)$$

قوة كوريوليس Coriolis force

$$\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega}x\vec{v} \qquad (22)$$

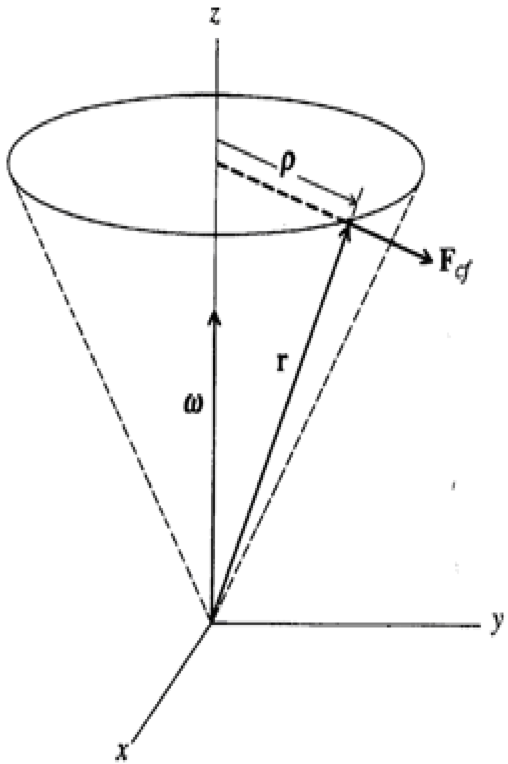
قوة سمتية Azimuthal Force

$$\vec{F}_{az} = -m\dot{\vec{\omega}}x\vec{r} \qquad (23)$$

قوة انسحابية Translational Force

$$\vec{F}_{tr} = -m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (24)$$

تنتج قوة الجذب المركزي في المعادلة (21) من الحركة الدورانيـــة لنظـــام الإحداثيات xyz وأن $\vec{\omega}.\vec{F}_{cf} = 0$ لان قوة الجذب المركزي عمودية على المحور الحامل لمتجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$، فإذا اختير متجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$على طول المحور z (محور الحركة) كما هو مبين في الشكل (3).



الشكل (3): قوة الجذب أثناء الدوران بسرعة زاوية

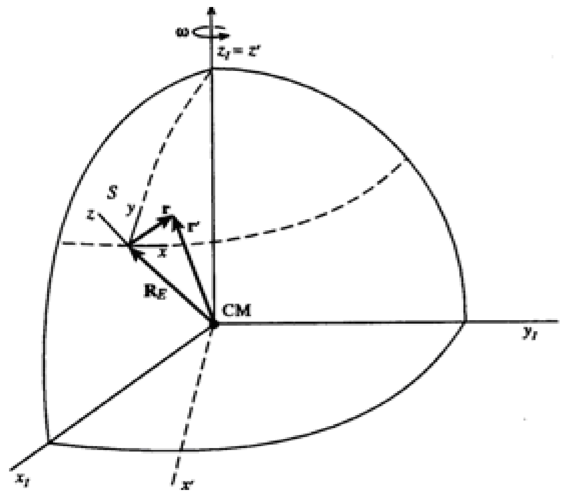
تعطى في هذه الحالة قوة الجذب المركزي بالعلاقة التالية:

$$\vec{F}_{cf} = -m\left[\vec{\omega}(\vec{\omega}.\vec{r}) - \vec{r}\omega^2\right] = m\omega^2\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) \qquad (25)$$
$$= m\omega^2\vec{\rho}$$

حيث $\vec{\rho}$ متجه موضع الجسم من المحور z. وتقع هذه القوة في المستوى xy وجهتها من محور الدوران.

الحركة على سطح الأرض: The Motion on the Earth

لدراسة حركة جسم بالقرب من سطح الأرض، من المناسب اختيار نظام إحداثيات مثبت على سطح الأرض. بفرض أن نظام إحداثي S' يدور بسرعة زاوية ثابتة $\vec{\omega}$ بالنسبة نظام إحداثيات عطالية S_I ولهما نفس نقطة الأصل (مركز الأرض) CM كما هو مبين في الشكل (4)،



الشكل (4): نظام الإحداثيات المثبت والمتحرك

يتبين من الشكل أن R يساوي الصفر لانطباق مركزي النظامين، وأن متجه موضع الجسم المتحرك هو r'، وتكون حسب المعادلة (20)، معادلة الحركة في هذه الحالة هي:

$$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F}' + m\vec{g} - m[\vec{\omega}x(\vec{\omega}x\vec{r}') - 2\vec{\omega}x\vec{v}'] \qquad (26)$$

تكون القوى المؤثرة على الكتلة m في نظام الإحداثيات العطالية هي قوة الجاذبية الأرضية $m\vec{g}$ وقوى أخرى $\vec{F}'$. أن مركز نظام الإحداثيات S المثبت على الأرض يتعين بنصف قطر الأرض $\vec{R}_E$. ويتعين موضع الكتلة m في هذا النظام بالمتجه $\vec{r}$ ويكون:

$$\vec{r}' = \vec{R}_E + \vec{r} \qquad (27)$$

بما أن $\vec{R}_E$ متجه ثابت، فـان $\frac{d\vec{r}'}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}$، بالاسـتفادة مـن المعادلـة (27)، والمعادلة (26)، نجد أن القوى المؤثرة على الكتلة m هي:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}'+m\vec{g}-m\left[\vec{\omega}x\left(\vec{\omega}x\left(\vec{R}_E+\vec{r}\right)\right)-2\vec{\omega}x\vec{v}\right] \qquad (28)$$

بما أن سرعة دوران الأرض صغيرة نسبياً ونصف قطرها $\vec{R}_E$ كبير مقارنةً مع $\vec{r}$ لذلك يمكن إهمال $\vec{r}$، وتعطى معادلة الحركة بالنسبة إلى النظـام S بشـكل تقريبي بالصورة:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}'+m\vec{g}-m\left[\vec{\omega}x\left(\vec{\omega}x\vec{R}_E\right)+2\vec{\omega}x\vec{v}\right] \qquad (29)$$

إذا كانت الأرض كروية تماماً، فان تسارع الجاذبية g يكون لـه قيمـة واحـدة واتجاهه نحو مركز الأرض. ولكن الواقع خلاف ذلك حيث أن الأرض ليسـت كروية تماماً كما أن كثافتها تتغير من مكان لآخر مما يؤدي إلى تغيـر g مـن نقطة إلى أخرى على سطح الأرض. فمن أجل جسم ساكن على سـطح الأرض (v=0) ولكي يكون متزن يجب أن يكون $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=0$ وينتج مـن المعادلـة (29) أن:

$$\vec{F}'=-m\left[\vec{g}-\vec{\omega}x\left(\vec{\omega}x\vec{R}_E\right)\right] \qquad (30)$$

بفرض أن:

$$\vec{g}_{eff}=\vec{g}-\vec{\omega}x\left(\vec{\omega}x\vec{R}_E\right) \qquad (31)$$

يسمى هذا التسارع بالتسارع الفعال للجاذبية الأرضية، وجهتـه عكـس جهـة القوة $\vec{F}'$، كما ويمكن حساب قيمة التصحيح في تسارع الجاذبية الأرضـية مـن العلاقة:

$$\left|\vec{\omega}x\left(\vec{\omega}x\vec{R}_E\right)\right|=\omega^2 R_E \sin\theta \qquad (32)$$

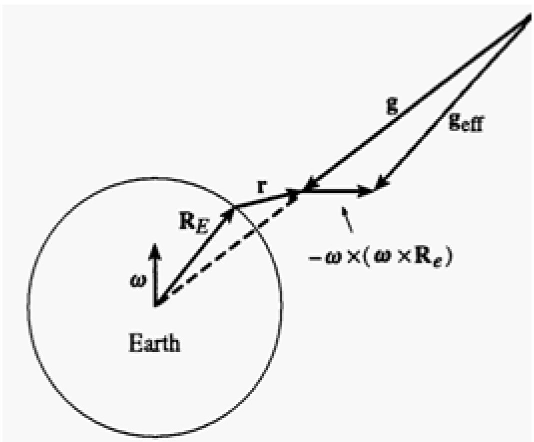
حيث θ الزاوية الرأسية بين متجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ ومتجـه نصـف قطـر الأرض $\vec{R}_E$. وبما أن السرعة الزاوية لدوران الأرض حول نفسها تساوي إلى:

$$\omega=\frac{2\pi}{\tau}=\frac{2\pi}{24x3600}=0.727x10^{-4}\frac{rad}{sec} \qquad (33)$$

بالتعويض في المعادلة (32) نحصل على قيمة التصحيح في تسارع الجاذبية الأرضية:

$$\omega^2 R_E \sin\theta = \left(0.727x10^{-4}\right)^2 \left(6.371x10^3\right)\sin\theta \approx 0.03\sin\theta \frac{m}{s^2} \qquad (34)$$

تكون هذه النتيجة أقل %0.3 من قيمة g، ومن غير الممكن قياسها، وجهة حد التصحيح باتجاه نصف القطر الذاهب من محور الدوران كما هو موضح في الشكل (5).



الشكل (5): تسارع الجاذبية الفعال واتجاهات القوى

بإدخال g_{eff} في المعادلة التفاضلية (29)، التي تصف حركة جسم على سطح الأرض نحصل على المعادلة الآتية:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = \vec{F}' + m\vec{g}_{eff} - 2m\vec{\omega}x\vec{v} \qquad (35)$$

ومن الملائم في دراسة هذه المسألة اختيار المحاور الإحداثية المتعامدة على سطح الأرض بحيث يكون المحور z حامل للمتجه g_{eff} بحيث:

$$\vec{g}_{eff} = -g_{eff}\vec{e}_z \qquad (36)$$

واختيار المحور y إلى الشمال أما المحور x فيختار إلى الشرق كما هو مبين في الشكل (5). ويكتب متجه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ بدلالة مركباته على هذه المحاور وفق المعادلة التالية:

$$\vec{\omega} = 0\vec{i} + \omega\sin\theta\vec{j} + \omega\cos\theta\vec{k} \qquad (37)$$

بالتعويض من المعادلة (37)، في علاقة قوة كوريوليس التالية:

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega}x\vec{v} \tag{38}$$

نحصل على:

$$\vec{F}_{cor} = 2m\omega\left[\left(v_y\cos\theta - v_z\sin\theta\right)\vec{i} - v_x\cos\theta\vec{j} + v_x\sin\theta\vec{k}\right] \tag{39}$$

وينتج عن تأثير قوة كوريوليس هذه انحراف الجسم عن اتجاه حركته. ففي نصف الكرة الأرضية الشمالي والزاوية θ ضمن المجال $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$، يكون انحراف الجسم عن اتجاه حركته مبين في الجدول التالي:

جهة السرعة	جهة الانحراف
شمال $(v_y>0)$	شرق
شرق $(v_x>0)$	جنوب وإلى الأعلى
جنوب $(v_y<0)$	غرب
غرب $(v_x<0)$	شمال والى الأسفل
أعلى $(v_z>0)$	غرب
أسفل $(v_z<0)$	شرق

حركة جسم بالنسبة للأرض Motion of Body Compared the Earth:

لا يمكن تطبيق قانون نيوتن الثاني إلا في مجموعة محاور قصورية فقط، ولكن إذا استخدمنا العلاقة

$$\vec{a}\Big|_F = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Big|_M + \dot{\vec{\omega}}X\vec{r} + 2\vec{\omega}X\dot{\vec{r}} + \vec{\omega}X\left(\vec{\omega}X\vec{r}\right) \tag{40}$$

نحصل على نتيجة قابلة للتطبيق في مجموعات المحاور غير القصورية. يمكن كتابة هذه النتيجة بعد ضربها بكتلة الجسم m بالشكل الآتي:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m\left(\dot{\vec{\omega}}X\vec{r}\right) - 2m\left(\vec{\omega}X\vec{V}\right) - m\left[\vec{\omega}X\left(\vec{\omega}X\vec{r}\right)\right] \tag{41}$$

بما أن الأرض تدور بسرعة زاوية $\vec{\omega}$ ثابتة حول محورها، فأن $\dot{\vec{\omega}} = 0$، عندئذٍ تصبح المعادلة السابقة بالصورة

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - 2m(\vec{\omega}X\vec{V}) - m[\vec{\omega}X(\vec{\omega}X\vec{r})] \qquad (42)$$

حيث:

$2m(\vec{\omega}X\vec{V})$ قوة كوريو ليس.

$m[\vec{\omega}X(\vec{\omega}X\vec{r})]$ القوة الجاذبة المركزية.

$-m[\vec{\omega}X(\vec{\omega}X\vec{r})]$ القوة الطاردة المركزية.

أمثلة Examples

1- تدور مجموعة محاور xyz بالنسبة لمجموعة أخرى مثبتة XYZ لهما نفس نقطة الأصل. يعطى متجه السرعة الزاوية للمجموعة xyz بالنسبة إلى المجموعة XYZ بالعلاقة:

$\vec{\omega} = 2t\vec{i} - t^2\vec{j} + (2t+4)\vec{k}$ حيث t هو الزمن. يعطى متجه موضع جسم عند اللحظة t، كما يشاهد في المجموعة xyz بالعلاقة:

$$\vec{r} = t^2\vec{i} - 6t\vec{j} + (4t^3 + 4)\vec{k}$$

أوجد عند اللحظة t=1s كلٍ من:

أ- السرعة الظاهرية والتسارع الظاهري.

ب- السرعة الحقيقية.

ت- تسارع كوريو ليس.

ث- تسارع الجاذبية المركزية.

الحل:

أ- السرعة الظاهرية عند اللحظة t هي:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_M = 2t\vec{i} - 6\vec{j} + 12t^2\vec{k} \qquad (1)$$

وعندما t=1s تكون السرعة الظاهرية مساوية إلى.

$$\vec{V} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}$$

لإيجاد التسارع الظاهري نشتق السرعة الظاهرية العلاقة (1) بالنســبة للــزمن فنحصل على:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 24t\vec{k} \qquad (2)$$

التسارع الظاهري عند t=1 s يساوي:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 24\vec{k}$$

ب- تعطى السرعة الحقيقية عند أي زمن t من:

$$\vec{V}\,\Big|_F = \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_M + \vec{\omega}\,X\,\vec{r} \qquad (3)$$

$$\vec{v}\Big|_F = \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_M + \vec{\omega}\,X\,\vec{r} = \left(2\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}\right)$$
$$+\left[2t\vec{i} - t^2\vec{j} + (2t+4)\vec{k}\right]X\left[\left(t^2+1\right)\vec{i} - 6t\vec{j} + 4t^3\vec{k}\right]$$

وعند t=1s تحسب السرعة الحقيقية من العلاقة رقم (3):

$$\vec{V} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 30\vec{i} - 16\vec{j} + \vec{k} \qquad (4)$$

ت- تسارع كوريو ليس

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}X\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(4\vec{i} - 2\vec{j} + 12\vec{k}\right)X\left(2\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}\right)$$
$$= 48\vec{i} - 24\vec{j} - 20\vec{k}$$

(5)

ث- التسارع الجاذب:

$$\vec{\omega}X\left(\vec{\omega}X\vec{r}\right) = \left(2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}\right)X\left(32\vec{i} + 4\vec{j} - 10\vec{k}\right)$$
$$= 71\vec{i} + 190\vec{j} + 8\vec{k}$$

.a تتحـــرك مجموعــة محـــاور xyz بســرعة زاويـــة $\vec{\omega} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ بالنسبة لمجموعة محاور XYZ مثبتة (قصورية) لهما نفس

نقطة الأصل. إذا كان $\vec{r}$ متجه موضع الجسم المتحرك، يعطى في المجموعة xyz بدلالة الزمن t بالعلاقة:

$$\vec{r} = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + e^{-t}\vec{k}$$

أوجد :

أ- $\frac{d\vec{r}}{dt}$ بالنسبة للمجموعة المتحركة.

ب- $\frac{d\vec{r}}{dt}$ بالنسبة للمجموعة المثبتة.

ت- $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ بالنسبة للمجموعة المتحركة.

ث- $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ بالنسبة للمجموعة المثبتة.

3- تدور مجموعة محاور xyz بسرعة زاوية $\vec{\omega} = 5\vec{i} - 4\vec{j} - 10\vec{k}$ بالنسبة لمجموعة محاور XYZ مثبتة لها نفس نقطة الأصل. أوجد سرعة جسم مثبت في المجموعة xyz عند النقطة (-2,1,3) كما يراها مشاهد مثبت في المجموعة XYZ.

4- مجموعة محاور xyz تدور حول المحور z بسرعة زاوية: $\vec{\omega} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$ بالنسبة لمجموعة المحاور XYZ المثبتة ، حيث t هي الزمن . متجه الموضع لنقطة أصل المجوعة xyz بالنسبة للمجموعة XYZ هو $\vec{R} = t\vec{i} - \vec{j} + t^2\vec{k}$. إذا كان متجه موضع جسم بالنسبة للمجموعة المتحركة هو: $\vec{r} = (3t+1)\vec{i} - 2t\vec{j} + 5\vec{k}$

أوجد:

أ- السرعة الظاهرية للجسم عند أي زمن t.

ب- السرعة الحقيقية للجسم عند أي زمن t.

ت- التسارع الظاهري للجسم عند أي زمن t.

ث- التسارع الحقيقي للجسم عند أي زمن t.

الحل:

أ- السرعة الظاهرية:

$$\vec{V} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_M = 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

ب- السرعة الحقيقية

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_M + \vec{\omega}X\vec{r} = \vec{i} + 2t\vec{k} + 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t & \sin t & 0 \\ 3t+1 & -2t & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} + 2t\vec{k} + 3\vec{i} - 2\vec{j} + (5\sin t)\vec{i} - (5\cos t)\vec{j}$$

$$+ (-2t.\cos t - (3t+1)\sin t)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = (4 + 5\sin t)\vec{i} - (2 + 5\cos t)\vec{j} + [2t - 2t.\cos t - (3t+1)\sin t]\vec{k}$$

ت- التسارع الظاهري:

$$\vec{a} = \left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_M = 0$$

ث- التسارع الحقيقي:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_M + \dot{\vec{\omega}}X\vec{r} + 2\vec{\omega}X\vec{V} + \vec{\omega}X(\vec{\omega}X\vec{r})$$

$$\vec{a} = 2\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\text{sint} & \text{cost} & 0 \\ 3t+1 & -2t & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \text{cost} & \text{sint} & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \text{cost} & \text{sint} & 0 \\ 5\text{sint} & -5\text{cost} & (-2t.\text{cost} - (3t+1)\text{sint}) \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} = 2\vec{k} + [(5\text{cost})]\vec{i} - [(-5\text{sint})]\vec{j}$$
$$+ [(2t.\text{sint}) - (3t+1)\text{cost}]\vec{k} + 2[-2\text{cost} - 3\text{sint}]\vec{k}$$
$$+ [-2t\text{cost.sint} - (3t+1)\text{sin}^2 t]\vec{i}$$
$$- [-2t.\text{cos}^2 t - (3t+1)\text{sint.cost}]\vec{j} + [-5\text{cos}^2 t - 5\text{sin}^2 t]\vec{k}$$

$$\vec{a} = 2\vec{k} + 5\text{cost}\,\vec{i} + 5\text{sint}\,\vec{j} + 2t\text{sint}\,\vec{k} - 3t\text{cost}\,\vec{k} - \text{cost}\,\vec{k} - 4\text{cost}\,\vec{k} - 6\text{sint}\,\vec{k}$$
$$- 2t\text{cost.sint}\,\vec{i} - 3t\text{sin}^2 t\,\vec{i} - \text{sin}^2 t\,\vec{i} + 2t\text{cos}^2 t\,\vec{j} + 3t\text{sint.cost}\,\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{a} = (5\text{cost} - 2t\text{sint.cost} - 3t\text{sin}^2 t - \text{sin}^2 t)\vec{i}$$
$$+ (5\text{sint} + 2t\text{cos}^2 t + 3t\text{sint.cost})\vec{j}$$
$$+ (2 + 2t\text{sint} - 3t\text{cost} - \text{cost} - 4\text{cost} - 6\text{sint} - 5)\vec{k}$$

$$\vec{a} = (5\text{cost} - 2t\text{sint.cost} - 3t\text{sin}^2 t - \text{sin}^2 t)\vec{i} + (5\text{sint} + 2t\text{cos}^2 t + 3t\text{sint.cost})\vec{j} +$$
$$(2t\text{sint} - 3t\text{cost} - 5\text{cost} - 6\text{sint} - 3)\vec{k}$$

دليل المصطلحات العلمية

إنكليزي - عربي

- A -	
Absorbance	حيود
Active Force	قوة فعالة
Addition of Velocities	جمع السرع
Amplitude	سعة ، اتساع
Amplitude of Vibration	سعة الذبذبة ، سعة الاهتزاز
Amplitude of Simple Harmonic Motion	سعة الحركة التوافقية البسيطة
Analytical Mechanics	الميكانيك التحليلي
Angular Momentum=moment of Momentum	العزم الحركي، العزم الزاوي
Anti-Rolling	مضاد للتأرجح
Aperiodic	لادوري
Arm of Couple=Moment Arm	نقطة الرأس (الذروة)
Asymptotical	تقاربي
Asymptotical	لاتزامن
Atom	ذرة
Attraction (Gravitational)	جذب تثاقلي
Attractive Force	قوة جاذبة أو قوة الجذب
Axis	محور
- B -	
Balance (Spring)	ميزان ذو نابض (ربيعة)
Ballistica	علم حركة القذائف (طلقات الأسلحة الثقيلة والخفيفة ، قنابل الطائرات ، الصواريخ)
Binormal	ثنائي الناظم

Syrian Arab Republic
Ministry of Higher Education
Tishreen University
Faculty of Science

ANALYTICAL MECHANICS

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_j'$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H=0$$

BY

DR. H. A. SALMAN
Prof. Dep. Physics

DR. A. S. BISHANI
Prof. Dep. Physics

DR. M. H. FOHOUD
Associate Prof. Dep. Physics

DR. A. M. MAHMOUD
Lecturer Dep. Physics

1430 - 1431
2009 - 2010

سعر المبيع /260/ ل.س